

## Zadania domowe do wykładu prof. J. Krupskiego Matematyka II, 2005/2006

### Liczby zespolone

**Zadanie 1.** Przedstawić w postaci  $x + iy$  liczby zespolone:

a)  $(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i)$ ,   b)  $(3+i)^3 + (3-i)^3$ ,   c)  $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ ,  
d)  $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$ ,   e)  $i^{77}$ ,   f)  $\frac{(1+ictg\phi)^5}{(1-ictg\phi)^5}$ .

Odp. a)  $1 + 18i$ ,   b)  $36$ ,   c)  $2$ ,   d)  $\frac{13}{2} - \frac{1}{2}i$ ,   e)  $i$ ,   f)  $-\cos 10\phi + i \sin 10\phi$ .

**Zadanie 2.** Rozwiązać równania:

a)  $z^2 = 5 - 12i$ ,   b)  $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$ ,   c)  $|z| + z = 8 + 4i$ ,  
d)  $z^2 - 12z^* + 61 = 0$ ,   e)  $z^4 = |z|$ .

Odp. a)  $z = \pm(3 - 2i)$ ,   b)  $z_1 = 5 - 3i, z_2 = 2 + i$ ,   c)  $z = 3 + 4i$ ,  
d)  $z = -6 \pm 13i$ ,   e)  $z = 0 \vee z = \pm 1 \vee z = \pm i$ .

**Zadanie 3.** Rozwiązać układy równań:

a)  $\begin{cases} (1+i)z + (1-i)w = 1+i \\ (1-i)z + (1+i)w = 1+3i \end{cases}$    b)  $\begin{cases} iz + (1+i)w = 2+2i \\ 2iz + (3+2i)w = 5+3i \end{cases}$

Odp. a)  $z = i, w = 1 + i$ ,   b)  $z = 2, w = 1 - i$ .

**Zadanie 4.** Przedstawić w postaci trygonometrycznej:

a)  $1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$ ,   b)  $2 + \sqrt{3} + i$ ,   c)  $1 - (2 + \sqrt{3})i$ .

Odp. a)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ ,   b)  $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ ,  
c)  $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}(\cos(\frac{-5\pi}{12}) + i \sin(\frac{-5\pi}{12}))$ .

**Zadanie 5.** Znaleźć pierwiastki (w postaci trygonometrycznej):

a)  $\sqrt[6]{i}$ ,   b)  $\sqrt[10]{512(1 - i\sqrt{3})}$ ,   c)  $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1 - i)}$ .

Odp. a)  $e^{i\pi \frac{4k+1}{12}}, k = 0, 1, \dots, 5$ ,   b)  $2e^{i\pi \frac{6k-1}{30}}, k = 0, 1, \dots, 9$ ,  
c)  $\sqrt{2}e^{i\pi \frac{8k-1}{32}}, k = 0, 1, \dots, 7$ .

**Zadanie 6.** Znaleźć pierwiastki i zapisać je w postaci  $x + iy$ :

a)  $\sqrt[4]{-4}$ ,   b)  $\sqrt[4]{8i\sqrt{3} - 8}$ ,   c)  $\sqrt[3]{2 - 2i}$ ,   d)  $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$ .

Odp. a)  $1 \pm i, -1 \pm i$ ,   b)  $\pm(\sqrt{3}+i), \pm(1-i\sqrt{3})$ ,   c)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)$ ,  
 $\frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right), -1 - i$ ,   d)  $\pm\sqrt{3} + i, -2i$ .

**Zadanie 7.** Na płaszczyźnie zespolonej znaleźć miejsce geometryczne punktów spełniających warunek:

- a)  $|z - 1 - i| < 1$ ,   b)  $1 < |z - 2i| < 2$ ,   c)  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ,   d)  $|z - 1| + |z + 1| = 3$ ,  
e)  $-2 < \operatorname{Re} z < 2$ .

Odp.

- a) Koło o promieniu 1 i środku w punkcie  $(1, 1)$  (bez brzegów),  
b) Pierścień o środku w punkcie  $(0, 2)$  i o promieniach 1, 2 (bez brzegów),  
c) Półprosta wychodząca z początku układu współrzędnych,  
o kącie nachylenia  $\frac{\pi}{3}$ ,  
d) Elipsa o ogniskach w punktach  $-1, 1$  oraz o dużej półosi  $a = \frac{3}{2}$ ,  
e) Pas pionowy o osi symetrii pokrywającej się z osią  $OY$   
i o szerokości równej 4.

**Zadanie 8.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 2$  zachodzą równości:

- a)  $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$ ,  
b)  $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \sin \frac{5\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$ .

Wskazówki:

w1.  $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$ ,

w2. Skorzystać ze wzoru na sumę skończonej ilości wyrazów szeregu geometrycznego.