

MATEMATYKA I L. PROGRAM PRZEDMIOTU

(Semestr zimowy r. ak. 2006/2007)

I LOGIKA

Działania na zdaniach: Negacja, alternatywa, alternatywa wykluczająca, koniunkcja, implikacja (np. różnica między implikacją a potocznie rozumianym wynikaniem), tożsamość. Pojęcie tautologii (ważne tautologie: prawo podwójnego przeczenia, prawa de Morgana, prawo transpozycji). Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory. Indukcja matematyczna. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

II ZBIORY

Różne sposoby określania zbiorów. Suma, iloczyn i różnica zbiorów. Pojęcia inkluzji i dopełnienia. Prawa de Morgana. Iloczyn kartezjański zbiorów. Relacja. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

III FUNKCJE

Dwie (równoważne) definicje funkcji. Dziedzina, przeciwdziedzina, obraz, przeciwobraz. Identyfikacja dwóch odwzorowań. Surjekcja, injekcja, bijekcja. Problem odwracania odwzorowań. Superpozycja. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia (w szczególności funkcje arc... i ar...)

IV CIĄGI

Ciąg. Rodzaje ciągów (rosnący, niemalejący, malejący, nierosnący, monotoniczny, ściśle monotoniczny, ograniczony). Granica ciągu. Ciąg zbieżny (tw. Cauchy'ego). Tw. o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów. Tw. o zachowaniu nierówności. Tw. o trzech ciągach. Tw. o zbieżności ciągu monotonicznego (bez dowodu). Liczba e (jako granica ciągu, jako suma szeregu i jako przykład liczby niewymiernej). Ciągi rozbieżne do $\pm\infty$. Tw. Stolza (bez dowodu). Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

V SZEREGI

Nieskończony szereg liczbowy. Zbieżność szeregu. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Szeregi o wyrazach dodatnich. Kryterium porównawcze zbieżności szeregów. Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego zbieżności i rozbieżności szeregów. Szeregi o dowolnych wyrazach rzeczywistych. Bezwzględna zbieżność szeregów. Kryterium Leibniza zbieżności szeregu. Szeregi funkcyjne. Szeregi potęgowe. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

VI LICZBY ZESPOLONE

Grupy i ich najprostsze własności (w grupie jest tylko jeden element neutralny, tylko jeden odwrotny do danego, pojęcie podgrupy, grupa abelowa). Ciało i podciało. Ciało liczb zespolonych. Fundamentalne twierdzenie algebry (bez dowodu). Dodawanie, mnożenie (w szczególności dzielenie) i sprzęganie liczb zespolonych. Moduł i argument liczby zespolonej. Nierówność trójkąta. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych (płaszczyzna Gaussa). Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Potęgowanie (wzory de Moivre'a) i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Funkcje $\sin$, $\cos$ oraz $\exp$ jako przykłady funkcji zmiennej zespolonej (w szczególności wykazanie, że $\exp(z_1)\exp(z_2)=\exp(z_1+z_2)$). Wzór Eulera. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

VII FUNKCJE CIĄGŁE

Przestrzeń metryczna. Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej. Otoczenie i sąsiedztwo. Klasyfikacja punktów zbioru (punkty wewnętrzne, skupienia i izolowane). Zbiory otwarte,

domknięte i ograniczone. Definicje granicy funkcji (ciągowa i otoczeniowa). Dwie (równoważne) definicje ciągłości funkcji (Heinego i Cauchy'ego). Tw. o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o ciągłości superpozycji funkcji. Twierdzenia (1) o ciągłości funkcji odwrotnej i (2) Weierstrassa (oba bez dowodów). Tw. o własności Darboux funkcji ciągłych. Tw. o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

VIII RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Pochodna funkcji. Geometryczna interpretacja pochodnej. Tw. o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Tw. o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o pochodnej superpozycji funkcji. Tw. o pochodnej funkcji odwrotnej. Styczne i normalne do krzywej płaskiej. Twierdzenia o wartości średniej: Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego. Wnioski z tw. Lagrange'a (jeżeli $df/dx=0 \dots$ i jeżeli $df/dx>0 \dots$). Reguła de l'Hospitala. Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora. Ekstremum. Tw. o warunku dostatecznym istnienia ekstremum. Tw. o znikaniu df/dx w punkcie ekstremum. Punkt przegięcia. Tw. o ekstremach i punktach przegięcia funkcji dostatecznie wiele razy różniczkowalnej. Wypukłość i wklęsłość. Asymptoty. Podsumowanie: badanie przebiegu zmienności funkcji. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

IX MACIERZE I WYZNACZNIKI

Macierze. Rodzaje macierzy: Prostokątne, kwadratowe, zerowe, jednostkowe, diagonalne, symetryczne, antysymetryczne, hermitowskie. Jednoargumentowe działania na macierzach: Transpozycja, sprzężenia w sensie zespolonym i hermitowskim, ślad. Dwuargumentowe działania na macierzach: Mnożenie przez liczbę, dodawanie, mnożenie, komutator. Obroty w R^2 . Definicja wyznacznika (w szczególności uwagi nt. permutacji). Reguła Sarrusa. Własności wyznaczników (w tym tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy). Rozwinięcie Laplace'a dla wyznacznika. Odwracanie macierzy. Grupa (ze względu na mnożenie) macierzy nieosobliwych. Minor. Rząd macierzy i jego elementarne własności. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

X RÓWNANIA LINIOWE

Układ równań liniowych. Wzory Cramera (w szczególności jednoznaczność rozwiązań układu cramerowskiego). Kombinacja liniowa równań. Liniowa niezależność równań. Układy równoważne. Liczba rozwiązań. Tw. Kroneckera i Capelliego. Jednorodny układ równań. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

XI R^3

Punkty, wektory związane i wektory swobodne. Odległości między punktami, długości wektorów. Działania na wektorach: Mnożenie przez liczbę i dodawanie wektorów. R^3 jako przestrzeń wektorowa. R^3 jako przestrzeń euklidesowa. Kombinacja liniowa wektorów. Wektory liniowo niezależne. Baza **i**, **j**, **k**. Iloczyn skalarny. Iloczyn wektorowy. Iloczyn mieszany. Równania ogólne płaszczyzny i prostej (interpretacja). Równania parametryczne płaszczyzny i prostej. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty i prostej przechodzącej przez dwa punkty. Interpretacja geometryczna układów równań liniowych. Odległość punktu od płaszczyzny i od prostej. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.