

## TEMATY EGZAMINACYJNE Z MATEMATYKI I A (Semestr zimowy r. ak. 2003/2004)

### I NIECO LOGIKI

Działania na zdaniach: Negacja, alternatywa, alternatywa wykluczająca, koniunkcja, implikacja (np. różnica między implikacją a potocznie rozumianym wynikaniem), tożsamość. Pojęcie tautologii (ważne tautologie: prawo podwójnego przeczenia, prawa de Morgana, prawo transpozycji). Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory. Indukcja matematyczna. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

### II ZBIORY

Różne sposoby określania zbiorów. Suma, iloczyn i różnica zbiorów. Pojęcia inkluzji i dopełnienia. Prawa de Morgana. Iloczyn kartezyjski zbiorów. Relacja. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

### III FUNKCJE

Dwie (równoważne) definicje funkcji. Dziedzina, przeciwdziedzina, obraz, przeciwbraz. Identyfikacja dwóch odwzorowań. Surjekcja, injekcja, bijekcja. Problem odwracania odwzorowań. Superpozycja. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia (w szczególności funkcje arc... i ar...)

### IV CIĄGI

Ciąg. Rodzaje ciągów (rosnący, niemalejący, malejący, nierosnący, monotoniczny, ściśle monotoniczny, ograniczony). Granica ciągu. Ciąg zbieżny (tw. Cauchy'ego). Tw. o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów. Tw. o zachowaniu nierówności. Tw. o trzech ciągach. Tw. o zbieżności ciągu monotonicznego (bez dowodu). Liczba  $e$  (jako granica ciągu, jako suma szeregu i jako przykład liczby niewymiernej). Ciągi rozbieżne do  $\pm\infty$ . Tw. Stolza (bez dowodu). Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

### V LICZBY ZESPOLONE

Grupy i ich najprostsze własności (w grupie jest tylko jeden element neutralny, tylko jeden odwrotny do danego, pojęcie podgrupy, grupa abelowa). Ciało i podciało. Ciało liczb zespolonych. Fundamentalne twierdzenie algebry (bez dowodu). Dodawanie, mnożenie (w szczególności dzielenie) i sprzęganie liczb zespolonych. Moduł i argument liczby zespolonej. Nierówność trójkąta. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych (płaszczyzna Gaussa). Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Potęgowanie (wzory de Moivre'a) i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Funkcje  $\sin$ ,  $\cos$  oraz  $\exp$  jako przykłady funkcji zmiennej zespolonej (w szczególności wykazanie, że  $\exp(z_1)\exp(z_2)=\exp(z_1+z_2)$ ). Wzór Eulera. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

### VI FUNKCJE CIĄGŁE

Przestrzeń metryczna. Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej. Otoczenie i sąsiedztwo. Klasyfikacja punktów zbioru (punkty wewnętrzne, skupienia i izolowane). Zbiory otwarte, domknięte i ograniczone. Definicje granicy funkcji (ciągowa i otoczeniowa). Dwie (równoważne) definicje ciągłości funkcji (Heinego i Cauchy'ego). Tw. o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o ciągłości superpozycji funkcji. Twierdzenia (1) o ciągłości funkcji odwrotnej i (2) Weierstrassa (oba bez dowodów). Tw. o własności Darboux funkcji ciągłych. Tw. o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

### VII RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Pochodna funkcji. Geometryczna interpretacja pochodnej. Tw. o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Tw. o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o pochodnej

superpozycji funkcji. Tw. o pochodnej funkcji odwrotnej. Styczne i normalne do krzywej płaskiej. Twierdzenia o wartości średniej: Rolle'a i Lagrange'a. Wnioski z tw. Lagrange'a (jeżeli  $df/dx=0$  ... i jeżeli  $df/dx>0$ ...). Reguła de l'Hospitala. Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora. Ekstremum. Tw. o warunku dostatecznym istnienia ekstremum. Tw. o znikaniu  $df/dx$  w punkcie ekstremum. Punkt przegięcia. Tw. o ekstremach i punktach przegięcia funkcji dostatecznie wiele razy różniczkowalnej. Wypukłość i wklęsłość. Asymptoty. Podsumowanie: badanie przebiegu zmienności funkcji. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

### VIII MACIERZE I WYZNACZNIKI

Macierze. Rodzaje macierzy: Prostokątne, kwadratowe, zerowe, jednostkowe, diagonalne, symetryczne, antysymetryczne, hermitowskie. Jednoargumentowe działania na macierzach: Transpozycja, sprzężenia w sensie zespolonym i hermitowskim, ślad. Dwuargumentowe działania na macierzach: Mnożenie przez liczbę, dodawanie, mnożenie, komutator. Obroty w  $\mathbb{R}^2$ . Definicja wyznacznika (w szczególności uwagi nt. permutacji). Reguła Sarrusa. Własności wyznaczników ( w tym tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy). Rozwinięcie Laplace'a dla wyznacznika. Odwracanie macierzy. Grupa (ze względu na mnożenie) macierzy nieosobliwych. Minor. Rząd macierzy i jego elementarne własności. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

### IX RÓWNANIA LINIOWE

Układ równań liniowych (także zapis macierzowy). Wzory Cramera (w szczególności jednoznaczność rozwiązań układu cramerowskiego). Kombinacja liniowa równań. Liniowa niezależność równań. Układy równoważne. Liczba rozwiązań. Tw. Kroneckera i Capellego. Jednorodny układ równań. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

### X $\mathbb{R}^3$

Punkty, wektory związane i wektory swobodne. Odległości między punktami, długości wektorów. Działania na wektorach: Mnożenie przez liczbę i dodawanie wektorów. Iloczyn skalarny.  $\mathbb{R}^3$  jako przestrzeń wektorowa. Kombinacja liniowa wektorów. Baza  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .  $\mathbb{R}^3$  jako przestrzeń euklidesowa. Iloczyn wektorowy. Iloczyn mieszany. Równania ogólne płaszczyzny i prostej (interpretacja). Równania parametryczne płaszczyzny i prostej. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty i prostej przechodzącej przez dwa punkty. Interpretacja geometryczna układów równań liniowych. Odległość punktu od płaszczyzny i od prostej. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

### XI PRZESTRZENIE WEKTOROWE

Przestrzeń wektorowa. Podprzestrzeń. Liniowa kombinacja wektorów. Wektory liniowo niezależne. Tw. o  $n \geq 2$  wektorach liniowo zależnych. Przestrzeń rozpięta przez wektory. Baza. Tw. o jednoznacznym przedstawieniu wektorów w danej bazie. Tw. o niezależności liczby elementów bazy od jej wyboru. Wymiar. Badanie liniowej niezależności wektorów (wprost z definicji i (bez dowodu) na podstawie minora bazowego lub rzędu macierzy).