

Zadania domowe z mechaniki kwantowej I - 2008/09

Seria 1

Zadanie 1.

Znaleźć szereg Fouriera dla funkcji okresowej o okresie l określonej w przedziale $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ wzorem

$$f(x) = \left(\frac{l}{2} - |x|\right)|x|.$$

Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Zadanie 2.

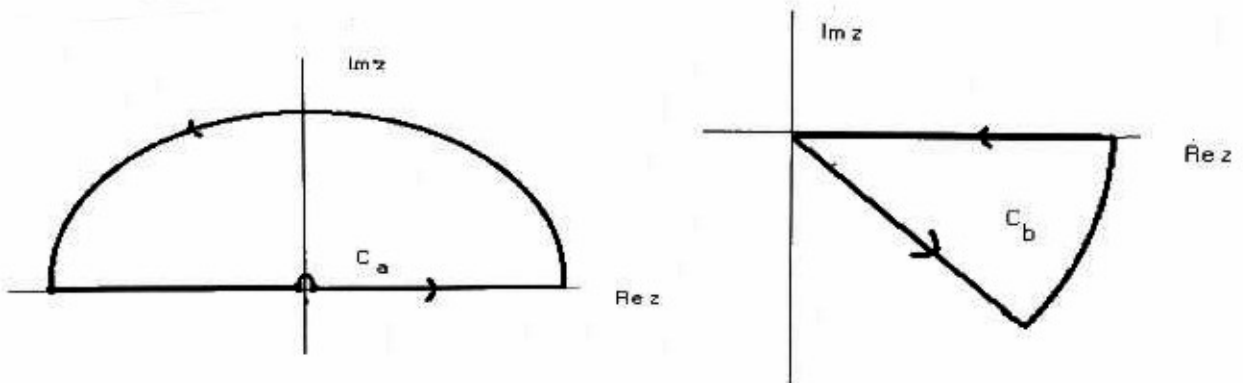
W nieskończenie głębokiej studni potencjalnej o szerokości a czastka może znajdować w stanach o energii $E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) i jest wtedy opisana funkcją falową

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & \text{dla } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

- a) Sprawdzić poprawność unormowania funkcji falowej.
- b) Obliczyć $\langle x \rangle$, σ_x , $\langle p_x \rangle$ i σ_{p_x} oraz sprawdzić zgodność wyników z zasadą nieoznaczoności Heisenberga $\sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}$.
- c) Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa $\rho(p_x)$ dla pędu czastki.

Zadanie 3.

- a) Wykazać, że $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. Wskazówka: Rozważyć całkę $\int_{C_a} \frac{e^{iz}}{z} dz$.
- b) Obliczyć całkę Fresnela $\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx$. Wskazówka: Rozważyć całkę $\int_{C_b} e^{-z^2} dz$.



9 października 2008 r.