Zadania z mechaniki kwantowej I 2008/09
seria III

Zadanie 1. Cząstka o masie m porusza się w jednowymiarowej studni potencjału:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |x| < a \\ +\infty & \text{dla} \quad |x| > a. \end{cases}$$

Studnię przegrodzono częściowo przepuszczalną barierą

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x).$$

Zbadaj wpływ przegrody na energie i funkcje własne hamiltonianu cząstki [przedyskuj szczegółowo funkcję falową stanu podstawowego] w zależności od parametru przepuszczalności bariery Ω

Wskazówka W warunkach zszycia należy uwzględnić, że pochodna funkcji falowej jest nieciągła. Jej skok w $x = 0$ można wyznaczyć całkując równanie Schrödingera stronami w granicach od $-\epsilon$ do $+\epsilon$ i przechodząc do granicy $\epsilon \to 0$.

Zadanie 2. Cząstka o masie m porusza się w jednowymiarowej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad x \le 0 \\ -V_0 & \text{dla} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{dla} \quad x \ge a, \end{cases}$$

gdzie $V_0 > 0$. W wyniku pojedyńczego pomiaru zmierzono energię $E = -\frac{1}{2}V_0$. Czy możliwe jest, aby był to jedyny stan związany w tej studni?

Zadanie 3. Cząstka o masie m porusza się w jednowymiarowej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{dla} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Oblicz energie i funkcje własne cząstki. Sprawdź, czy stan podstawowy jest stanem minimalnym w sensie zasady nieznaczoności Heisenberga podobnie jak to ma miejsce dla stanu podstawowego cząstki poruszającej się w potencjale oscylatora harmonicznego.

Zadanie 4. Stan cząstki znajdującej się w nieskończonej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < x < L \\ +\infty & \text{dla} \quad x < 0 \quad \text{i} \quad x > L \end{cases},$$

opisuje w chwili $t = 0$ następująca funkcja falowa:

$$\Phi(x, t = 0) = \begin{cases} A \sin^5(\frac{\pi x}{L}) & \text{dla} \quad 0 < x < L \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \quad \text{i} \quad x > L \end{cases},$$

gdzie A jest dodatnią stałą rzeczywistą. Unormowane stany i energie własne w studni wynoszą odpowiednio: $e_n = Cn^2$ i $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(n\pi\frac{x}{L})$ gdzie C jest pewną stałą. Oblicz, w chwili t=0:

- Jaką energię najprawdopodobniej zmierzy eksperymentator?
- Jakie jest prawdopodobieństwo pomiaru: $P(e = \frac{1}{2}e_2)$, $P(e = \frac{1}{9}e_3)$ oraz $P(e > \frac{1}{2}e_4)$?

Znajdź ewolucję czasową układu t.j. $\Phi(x, t)$ i policz średnie wartości energii, położenia i pędu cząstki w dowolnej chwili czasu t. Jak zmienia się prawdopodobieństwo pomiaru $P(e = e_1)$ w funkcji czasu?

Wojciech Satuła