Mechanika kwantowa I - 2008/2009

Seria 5

Zadanie 1.

a) Obliczyć następujące komutatory:

$$[\hat{L}_i, \hat{x}_k],\ [\hat{L}_i, \hat{\vec{r}}^2],\ [\hat{L}_i, \hat{p}_k],\ [\hat{L}_i, \hat{\vec{p}}^2],\ [\hat{\vec{L}}^2, \hat{x}_i],\ [\hat{\vec{L}}^2, \hat{p}_i]$$

(wskaźniki i, k odpowiadają składowym kartezjańskim).

b) Wykazać, że jeśli jakiś operator jest przemienny z dwoma składowymi kartezjańskimi operatora orbitalnego momentu pędu, to jest przemienny także z operatorem jego trzeciej składowej.

c) Wykazać, że operator radialnej składowej pędu $\hat{p}_r = \frac{1}{2}(\frac{\hat{\vec{r}}}{r}\hat{\vec{p}} + \hat{\vec{p}}\frac{\hat{\vec{r}}}{r})$ w reprezentacji położeniowej ma postać $\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$. Wykazać, że $[\hat{r}, \hat{p}_r] = i\hbar$.

Zadanie 2.

a) Wykazać, że w stanie ψ_{lm_l} z określonymi wartościami kwadratu orbitalnego momentu pędu i jego rzutu na oś z średnią wartość i dyspersję rzutu orbitalnego momentu pędu na kierunek $\vec{n} = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$ określają wzory $< L_n >= m_l\hbar\cos\beta$ i $\sigma^2_{L_n} = \frac{1}{2}[l(l+1) - m_l^2]\hbar^2\sin^2\beta$.

b) Obliczyć w stanie ψ_{1m_l} z określonymi wartościami kwadratu orbitalnego momentu pędu $(l = 1)$ i jego rzutu na oś z prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych rzutów orbitalnego momentu pędu na kierunek $\vec{n}$.

Zadanie 3. Zależność funkcji falowej cząstki od współrzędnej kulistej φ ma postać $\psi(\varphi) = A\cos^n\varphi$, gdzie $n \in N$. Znaleźć stałą A z warunku normalizacji $\int_0^{2\pi}|\psi(\varphi)|^2 d\varphi = 1$ i obliczyć prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych wartości $m_l\hbar$ w wyniku pomiaru L_z.

Zadanie 4. Udowodnić, że jeśli w reprezentacji położeniowej $\psi_{n_rlm_l}(r,\vartheta,\varphi) = R_{n_rl}(r)Y_{lm_l}(\vartheta,\varphi)$, to w reprezentacji pędowej

$$\tilde{\psi}_{n_rlm_l}(p,\vartheta_p,\varphi_p) = (-i)^l\tilde{R}_{n_rl}(p)Y_{lm_l}(\vartheta_p,\varphi_p),$$

gdzie $\tilde{R}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar^3}}\int_0^\infty drr^2 j_l(\frac{pr}{\hbar})R_{n_rl}(r)$.

Wskazówka: Wykorzystać wyprowadzony na wykładzie wzór

$$e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l\Big(\frac{pr}{\hbar}\Big)P_l(\cos\gamma),$$

gdzie $\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_p + \sin\vartheta\sin\vartheta_p\cos(\varphi - \varphi_p)$, oraz prawo składania funkcji sferycznych $P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m_l=-l}^{l} Y^*_{lm_l}(\vartheta,\varphi)Y_{lm_l}(\vartheta_p,\varphi_p)$.

Zadanie 5. Znaleźć poziomy energetyczne i funkcje falowe stanów związanych cząstki o masie m w polu sił o energii potencjalnej $V(r) = -\alpha\delta(r-a)$, α, $a > 0$, w stanie s, czyli z $l = 0$. Ile jest takich poziomów energetycznych?

Wskazówka: Wykorzystać podstawienie $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$.

8 listopada 2008

Zygmunt Ajduk