Zadania z mechaniki kwantowej I 2008/09
seria VI

1. Obliczyć znormalizowaną funkcję rozkładu pędów dla atomu wodoru w stanie 1s, 2s i 2p.

2. Dana jest funkcja stanu atomu wodoru
$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{81}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(6-r)re^{-\frac{r}{3}}\cos\theta,$$
gdzie r jest w jednostkach promienia Bohra. a) Znaleźć liczby kwantowe (n, l, m) dla tego stanu; b) Z funkcji $\psi(r,\theta)$ skonstruować inną funkcję falową o tym samym n i l ale o m większym o jeden $(m+1)$; c) Znaleźć najbardziej prawdopodobną wartość r dla tego nowego stanu i porównać z tą samą wielkością dla stanu ψ.

3. W chwili $t = 0$ atom wodoru jest w stanie superponowanym
$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{4}{(2a)^{3/2}}\left[e^{-\frac{r}{a}}Y_0^0 + A\frac{r}{a}e^{-\frac{r}{2a}}(-iY_1^1 + Y_1^{-1} + \sqrt{7}Y_1^0)\right].$$
a) oblicz stałą normalizacyjną A; b) jakie jest prawdopodobieństwo, że z pomiaru L^2 otrzymamy wartość $\hbar^2 l(l+1)$? c) jaka jest gęstość prawdopodobieństwa $P_r(r)$ tego, że elektron znajdziemy w otaczającej proton powłoce o grubości dr i o promieniu r? d) dla jakiej wartości r, $P_r(r)$ ma maksimum? e) jaką postać ma $\psi(\mathbf{r}, t)$, gdy stanem początkowym jest $\psi(\mathbf{r}, 0)$? f) jaką postać ma $\psi(\mathbf{r}, t)$, jeśli w chwili $t = 0$ pomiar L_z dał wartość $\hbar$? g) jaką postać ma $\psi(\mathbf{r}, t)$, jeśli w chwili $t = 0$ pomiar L_z dał wartość zero? h) jaka jest wartość oczekiwana dla operatora energii sferycznej $\langle H_s\rangle$, gdzie
$$H_s \equiv H - \frac{p_r^2}{2m},$$
w $t = 0$?

4. Rozważyć cząstkę w centralnym polu siły zakładając, że układ ma dyskretne widmo wzbudzeń. Każda orbitalna liczba kwantowa l ma wtedy pewną minimalną wartość energii. Pokazać, że wartość energii w minimum jest rosnącą funkcją l.

5. Znaleźć dokładne energie własne i funkcje własne stanów związanych dla potencjałów a) $V(r) = -2D(\frac{a}{r} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2})$, gdzie $a \geq 0$ (potencjał Kratzera); b) $V(r) = \frac{A}{r^2} + Br^2$, gdzie $A, B \geq 0$ (oscylator harmoniczny z siłą odpychającą). Przedyskutować szczegółowo rozwiązania.

17 listopad 2008