Zadania z mechaniki kwantowej I 2008/09
seria VIII

Zadanie 1.
Równanie Schrödingera cząstki naładowanej poruszającej się w polu elektromagnetycznym jest niezmiennicze względem lokalnej transformacji cechowania tj. nie zmienia się przy następującej jednoczesnej zmianie potencjałów pól $\boldsymbol{A}$ i φ oraz funkcji falowej Ψ:

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\Lambda, \qquad \varphi \to \varphi + \partial_t \Lambda, \qquad \Psi \to e^{-iq\Lambda/\hbar}\Psi \tag{1}$$

gdzie Λ jest dowolną funkcją skalarną. Rozważ ruch cząstki swobodnej o masie m i ładunku q umieszczonej w stałym polu magnetycznym $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$, przyjmując cechowanie $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$. Znajdź stany własne i energie własne cząstki przy tym cechowaniu. Porównaj uzyskany wynik z wynikami uzyskanymi na ćwiczeniach dla cechowania $\boldsymbol{A} = (-By, 0, 0)$. Oblicz funkcję $\Lambda(\boldsymbol{r})$ wiążącą oba cechowania. Sprawdź czy uzyskane funkcje własne rzeczywiście powiązane są transformacją (1)? Przedyskutuj uzyskany wynik.

Zadanie 2.
Znajdź poziomy energetyczne i funkcje własne cząstki o masie m i ładunku q poruszającej się w we wzajemnie prostopadłych, stałych, jednorodnych polach: elektrycznym $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x$ i magnetycznym $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$. Wybierz cechowanie $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$.

Zadanie 3.
Rozważ cząstkę o ładunku q i masie m, poruszającą się w płaszczyźnie Oxy w stałym polu magnetycznym $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ prostopadłym do płaszczyzny ruchu. Wybierz cechowanie symetryczne: $\boldsymbol{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$. Pokaż, że układ ma symetrię osiową t.j., że hamiltonian cząstki komutuje z trzecią składową operatora momentu pędu $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$. Znajdź energie własne cząstki i stany własne diagonalizujące jednocześnie operatory $\hat{H}$ i $\hat{L}_z$.
Wskazówka: Skorzystaj z następujących operatorów:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\Omega}}\left[\hat{p}_x - i\hat{p}_y - \frac{m\Omega}{2i}(x - iy)\right], \qquad \hat{a} = (\hat{a}^\dagger)^\dagger \tag{2}$$

gdzie $\Omega = \frac{|q|B}{m}$ jest częstością cyklotronową.

Wojciech Satuła