Zadania z mechaniki kwantowej I 2008/09
seria IX

1. Udowodnić tożsamość:

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)^n = \frac{1}{4}[3 + (-3)^n] + \frac{1}{4}[1 - (-3)^n]\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2. \tag{1}$$

1. Dowolną funkcję falową układu dwóch cząstek o spinach 1/2 każda można wyrazić jako kombinację liniową stanów singletowego i trypletowego:

$$\Phi\Big(\frac{1}{2}m_1, \frac{1}{2}m_2\Big) = \sum_{S=0,1} \sum_{-S \leq M \leq S} a_{SM}|SM\rangle \tag{2}$$

gdzie m_1 i m_2 oznaczają rzuty spinów cząstek na oś z. Znaleźć operatory rzutujące na podprzestrzenie trypletową i singletową oraz operator wymiany spinów $\hat{P}_\sigma \Phi(\frac{1}{2}\, m_1, \frac{1}{2}\, m_2) = \Phi(\frac{1}{2}\, m_2, \frac{1}{2}\, m_1)$. Znalezione operatory wyrazić przy pomocy iloczynu $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$.

2. Znaleźć energie własne i odpowiadające im spinowe funkcje falowe układu proton - antyproton. Cząstki te są nieruchome i znajdują się w ustalonej odległości r od siebie, a ich oddziaływanie opisuje hamiltonian

$$H = g\left[\boldsymbol{\mu_1} \cdot \boldsymbol{\mu_2} - \frac{3(\boldsymbol{\mu_1} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\mu_2} \cdot \boldsymbol{r})}{r^2}\right],$$

w którym g jest stałą, a $\boldsymbol{\mu_1}$ i $\boldsymbol{\mu_2}$ są momentami magnetycznymi odpowiednio protonu i antyprotonu.

3. Cząstka o spinie 1/2 znajduje się w stałym polu magnetycznym $\vec{B} = B_0\vec{e}_z + B'\vec{e}_y$. Zakładając, że cząstka jest nieruchoma jej hamiltonian wynosi: $\hat{H} = -\vec{\mu}\vec{B}$, gdzie $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$ zaś $\mu > 0$ oznacza moment magnetyczny cząstki. Obliczyć funkcję falową cząstki $\Psi(t \neq 0)$ przyjmując, że w chwili $t = 0$ cząstka znajdowała się w stanie o spinie skierowanym do góry. Obliczyć prawdopodobieństwo odwrócenia spinu w funkcji czasu. Przedyskutować otrzymany wynik w granicach: $B_0 > 0$, $B' \to 0$ i $B_0 \to 0$, $B' > 0$.

4. Strumień nienaładowanych cząstek o spinie 1/2 (np. neutronów), momencie magnetycznym $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$, energii $E > |\mu|B_0$ i wektorze falowym $\vec{k} = [k\cos\alpha, k\sin\alpha]$ wchodzi, z lewej strony tj. od strony $x < 0$, w obszar o stałym polu magnetycznym:

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0 \quad \text{i} \quad -\infty < y < +\infty \\ B_0\vec{e}_z & \text{for} \quad x > 0 \quad \text{i} \quad -\infty < y < +\infty \end{cases}. \tag{3}$$

Moment magnetyczny sprzęga się z polem magnetycznym $\hat{V} = -\vec{\mu}\vec{B}$, kreując albo próg, albo studnię potencjału w zależności od orientacji spinu. Pole magnetyczne działa zatem jak układ dwójłomny rozdzielający strumień cząstek na dwa strumienie o różnych orientacjach spinu. Obliczyć kąty załamania i odbicia (czyli prawo Sneliusa) oraz prawdopodobieństwa przejścia i odbicia dla składowych strumienia o spinie skierowanym do góry i spinie skierowanym do dołu.
Wskazówka: Dla $x < 0$ równanie Schrödingera przybiera postać:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Strumień cząstek padających opisuje następująca funkcja falowa:

$$\begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \tag{5}$$

gdzie $\omega = E/\hbar$. Dla $x > 0$ należy uwzględnić dodatkowo oddziaływanie z polem.

Wojciech Satuła