

Zadanie konkursowe

Metodą wariacyjną, w klasie jednoparametrowych funkcji próbnych, oszacować energię stanu podstawowego układu jednowymiarowego opisanego hamiltonianem:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \alpha x^4.$$

Dla zadanej funkcji próbnej i dla $m = \omega = 1$ oraz $\alpha = 0.1, 1, 10$ podać wartości liczbowe otrzymanych energii.

Rozwiązanie przeliczone dla $\hbar = 1$

Jest to hamiltonian oscylatora harmonicznego zaburzonego przez αx^4 . Energia stanu podstawowego oscylatora niezaburzonego wynosi:

$$E_0 = 0.5\hbar\omega.$$

Przyjęta funkcja próbna:

$$\psi(x, a) = N \exp\left(-\frac{m\omega^2(ax)^2}{2\hbar\omega} - \frac{\alpha(ax)^4}{\hbar\omega}\right),$$

gdzie:

N – stała normalizacyjna,

a – parametr minimalizacyjny.

Otrzymałam następujące wartości energii w zależności od parametru α :

$$E(\alpha = 0.1) = 0.5655 \hbar\omega,$$

$$E(\alpha = 1) = 0.8476 \hbar\omega,$$

$$E(\alpha = 10) = 1.6541 \hbar\omega.$$

Okazuje się jednak, że w obecnej sytuacji mniejszą energię otrzymać można dla funkcji próbnej:

$$\psi(x, a) = N \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right).$$

Otrzymana energia wyniosła:

$$E(\alpha = 0.1) = 0.5603 \hbar\omega,$$

$$E(\alpha = 1) = 0.8125 \hbar\omega,$$

$$E(\alpha = 10) = 1.5313 \hbar\omega.$$