Zadania z Mechaniki Kwantowej I

Seria 1

16 listopada 2009

Zadanie 1

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{W}_2(\mathbb{R})$ wielomianów stopnia nie przewyższającego 2 wprowadzamy iloczyn skalarny za pomocą wzoru

$$g, h \in \mathbb{W}_2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (g, h) = \int_0^\infty g(x)h(x)e^{-x}\, dx$$

a. Sprawdzić, że jest to „dobry” iloczyn skalarny.
b. Za pomocą procedury Grama-Schmidta zortonormalizować bazę $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.

Zadanie 2

Znaleźć unormowane funkcje własne operatora

$$\hat{T} = k^2 x + \frac{d}{dx}$$

oraz odpowiadające im wartości własne. Jaki powinien być wymiar stałej k? Jaki wymiar będą mieć wartości własne?

Zadanie 3

Pokazać, że jeśli transformatami Fouriera funkcji $h(x)$ i $g(x)$ są odpowiednio funkcje $H(k)$ i $G(k)$, to transformata splotu funkcji h i g

$$(h \star g)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(\tau) g(x - \tau)\, d\tau$$

jest równa iloczynowi $H(k)G(k)$ ich transformat.

Zadanie 4

Dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geqslant a, \\ bx/a + b & \text{dla } -a < x < 0, \\ -bx/a + b & \text{dla } 0 \leqslant x < a \end{cases}$$

1. znaleźć b (w zależności od a) tak, aby funkcja f była unormowana;
2. znaleźć ciągłą transformatę Fouriera $F(k)$ funkcji $f(x)$, czyli współczynniki w rozkładzie f na fale płaskie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{ikx}\, dk.$$

Zadania dodatkowe

Zadanie 5

Pokazać, że funkcja

$$f(\lambda) = \int \psi^*(x + \lambda) x^2 \psi(x + \lambda)\, dx,$$

gdzie $\psi(x)$ jest pewną unormowaną funkcją, przyjmuje wartość minimalną dla $\lambda_0 = \langle x \rangle = (\psi, x\psi)$. Ile wynosi ta wartość?

Odpowiedzi

1. $\ell_0(x) = 1$, $\ell_1(x) = x - 1$, $\ell_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$ — czyli Laguerre'y, ale inaczej unormowane.
2. Z $k^2 x\phi + \frac{d\phi}{dx} = \lambda\phi$ przez rozdzielenie zmiennych $\frac{d\phi}{\phi} = (\lambda - k^2 x)\,dx$, skąd $\phi(x) = C\exp\left(\lambda x - k^2x^2/2\right)$. Normując $C = \pi^{-1/4}\sqrt{k}\exp\left(-\lambda^2/(2k^2)\right)$ — chyba. Widmo ciągłe.
3. Z definicji od razu widać, po odpowiedniej zamianie zmiennych.
4. $b = \sqrt{\frac{3}{2a}}$; z całki $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ikx}\,dx$ pracowicie licząc dostaniemy (jeśli się nie pomyliłem) $F(k) = 2\sqrt{\frac{3}{\pi a}}\frac{1}{ak^2}\sin^2\frac{ka}{2}$
5. $\int \psi^*(x+\lambda)x^2\psi(x+\lambda)\,dx = \int \psi^*(x)(x-\lambda)^2\psi(x)\,dx$, czyli $\langle x^2\rangle - 2\lambda\langle x\rangle + \lambda^2$, co ze względu na λ ma wartość minimalną dla $\lambda_0 = \langle x\rangle$ (wartość ta wynosi wówczas $\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathrm{Var}(x) = \sigma^2(x)$).