Zadania domowe z mechaniki kwantowej I - 2009/2010

Seria 2

Zadanie 1.
a) Znaleźć szereg Fouriera dla funkcji okresowej o okresie l określonej w przedziale $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ wzorem

$$f(x) = x^2.$$

b) Wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Zadanie 2.
a) Jaki jest sens fizyczny stałej p_0 dla unormowanej funkcji falowej $\psi(x) = \phi(x)e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}}$, gdzie $\phi(x)$ jest funkcją rzeczywistą?
b) Wykazać, że jeśli unormowana zespolona funkcja falowa $\phi(x)$ opisuje stan cząstki o średnich $\langle x \rangle = x_0$, $\langle p_x \rangle = p_0$, to dla funkcji falowej $\psi(x) = \phi(x + x_0)e^{-i\frac{p_0 x}{\hbar}}$ średnie wartości położenia i pędu są równe zero.

Zadanie 3.
Pewną cząstkę o masie m w stanie o energii E opisuje funkcja falowa $\Psi(x,t) = \sqrt{\lambda}e^{-\lambda|x|}e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$, gdzie stała $\lambda > 0$.
a) Wyznaczyć funkcję falową cząstki w reprezentacji pędowej i naszkicować rozkład pędu cząstki.
b) Obliczyć $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p_x \rangle$, $\langle p_x^2 \rangle$ i sprawdzić słuszność zasady nieoznaczoności Heisenberga w tym wypadku.
c) Jaka musi być energia E i energia potencjalna $V(x)$ cząstki, aby podana $\Psi(x,t)$ spełniała równanie Schrödingera z czasem?

Zadanie 4 (dodatkowe).
Jeśli na szczeliny przesłony pada prostopadle fala płaska o długości fali λ i amplitudzie $\psi(x)$, to zgodnie z teorią dyfrakcji amplituda fali ugiętej pod kątem θ jest w dużych odległościach proporcjonalna do

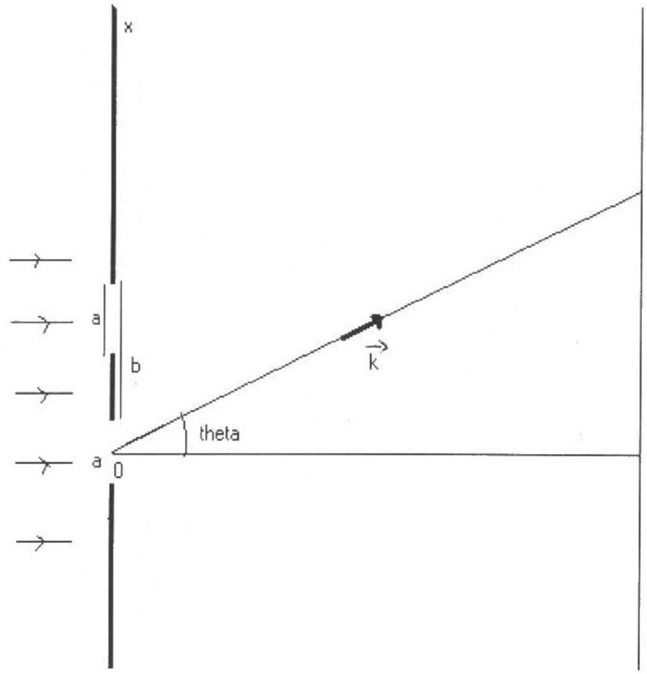
$$\tilde{\psi}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_x x}\psi(x)dx, \quad \text{gdzie } k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta.$$

Znaleźć i przedyskutować (zrobić wykres) rozkład natężenia fali ugiętej $|\tilde{\psi}(k_x)|^2$ przy dyfrakcji:
a) na pojedynczej szczelinie o szerokości a, czyli dla

$$\psi(x) = \begin{cases} A & x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}], \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

b) na dwóch szczelinach o szerokości a odległych o $b > a$, czyli dla

$$\psi(x) = \begin{cases} A & x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \cup [b - \frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}], \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$



12 października 2009 r.