Zadania z mechaniki kwantowej I 2009/10
seria III

1. Układ kwantowy znajdował się w stanie opisanym funkcją falową $\psi(x)$, gdy wykonano na nim pomiar położenia, tj. podziałano nań operatorem położenia $\hat{x}$ i otrzymano wartość x (zakładamy, że opisywany układ kwantowy jest jednowymiarowy w przestrzeni rzeczywistej). Jaki będzie stan układu zaraz po pomiarze? Zapisać jego funkcję falową $\psi_{\rm po}(x)$ w reprezentacji położeniowej. Jeśli natychmiast po pomiarze położenia wykonamy pomiar pędu, tj. na stan po pomiarze $\psi_{\rm po}(x)$ podziałamy operatorem pędu $\hat{p}$, to jakie możliwe wartości pędu można znaleźć? Gdybyśmy nie podziałali operatorem pędu, jak będzie wyglądała ewolucja w czasie tego układu po pomiarze $\psi_{\rm po}(x)$? Tzn, znaleźć jawnie zależność funkcji falowej od czasu (masa cząstki wynosi m a hamiltonian swobodny ma postać $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$). Co będzie, gdy odwrócimy kolejność i wpierw na stan o funkcji falowej $\psi(x)$ podziałamy operatorem pędu, i natychmiast później operatorem położenia? Jakie wtedy są możliwe wyniki pomiaru położenia? Jak będzie wyglądać ewolucja w czasie tego układu po pomiarze tylko pędu? Wsk. do obliczeń wygodnie jest użyć gaussowskiej reprezentacji funkcji (dystrybucji) δ-Diraca.

2. Impuls o długości 1 m zawiera 10^3 cząstek α (jądra ^{4}He). W chwili $t = 0$ każda z nich znajduje się w stanie opisanym funkcją jedną falową

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{ik_0 x}, & \text{dla} \quad |x| \leq 50\text{cm} \\ \quad 0 & \text{pozostałe}, \end{cases}$$

gdzie $k_0 = \pi/50$ 1/cm. a) Ile cząstek α w chwili $t = 0$ ma pęd w przedziale $(0 < \hbar k < \hbar k_0)$? b) Jakie wartości pędu nie zostaną zmierzone w chwili $t = 0$. c) Opisz eksperyment przygotowujący taki stan. d) Znajdź Δx i Δp dla tego stanu. Określ wartość $\Delta x \Delta p$. e) Znajdź ewolucję w czasie tej funkcji falowej (masę cząstek α znajdź w tablicach).

3. Wiedząc, że funkcja $\psi(x) = (1/\pi a^2)^{1/4} e^{-x^2/2a^2}$ jest funkcją falową będącą rozwiązaniem o najniższej energii $E = \hbar\omega/2$ jednowymiarowego równania Schrödingera z potencjałem $V(x)$ znaleźć funkcję $V(x)$. Przyjąć za dane a, ω i masę cząstki m.

4. (zadanie dodatkowe lecz ważne!) Wiele problemów w mechanice kwantowej polega na rozwiązaniu równania Schrödingera bez czasu, gdzie potencjał $V(x)$ jest zadany pewną funkcją. Aby rozwiązać to równanie różniczkowe, wykorzystuje się metodę Frobeniusa, która polega na szukaniu rozwiązania w postaci szeregu potęgowego $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^{\lambda+k}$ wokół punktu x_0 (jest to punkt zwyczajny lub co najwyżej osobliwy regularny). Trzeba znaleźć λ oraz współczynniki a_k, z $a_0 \neq 0$. Przećwiczymy

tę metodę na równaniu klasycznego oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \omega^2 y(x) = 0,$$

o dobrze znanych rozwiązaniach $y = \sin\omega x$ i $y = \cos\omega x$. Znaleźć rozwiązanie tego równania szukając go w postaci rozwinięcia wokół punktu $x_0 = 0$, tj.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k}.$$

Podstawić ten szereg do równania i poprzez dwukrotne różniczkowanie znaleźć warunek na wartości λ oraz warunki rekurencyjne na a_k. Zauważyć, że warunki rekurencyjne separują się dla k parzystych i nieparzystych. Wybierając odpowiednio $a_0 \neq 0$ i $a_1 = 0$ oraz różne wartości dozwolonych λ, znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania i sprawdzić, że odpowiednie szeregi sumują się do funkcji sinus i kosinus.

19 X 2009