IV seria zadań z mechaniki kwantowej I
27 października 2009

Zadanie 1

Cząstce o masie m poruszającej się po okręgu o obwodzie L, odpowiada hamiltonian $H = \frac{p_x^2}{2m}$, gdzie w reprezentacji położeniowej $p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$, x - współrzędna cząstki wzdłuż okręgu.

a) Wyznaczyć wartości energii cząstki i odpowiadające im unormowane funkcje falowe.

b) Wyznaczyć prawdopodobieństwa otrzymania w wynik pomiaru poszczególnych wartości energii oraz średnią energię w chwili t, jeśli w $t = 0$ cząstka znajduje się w stanie $\Psi(x, t = 0) = \frac{4}{\sqrt{5L}} \sin^3\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$.

Wskazówka: Rozważana cząstka ma jeden stopień swobody i funkcja falowa spełnia warunek $\psi(x + L) = \psi(x)$.

Zadanie 2

Znaleźć poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe cząstki o masie m poruszającej się w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad x < 0, \\ -V_0 & \text{dla} \quad 0 < x < a, \\ 0 & \text{dla} \quad x > a, \end{cases} \qquad V_0 > 0.$$

Czy można tak dobrać charakterystyczne parametry potencjału, aby nie zawierał on żadnego stanu związanego? Obliczyć wartość parametru a^2V_0, przy którym pojawi się tylko jeden stan związany i to o energii $E = -\frac{V_0}{2}$.

Zadanie 3

Cząstka o masie m znajduje się w nieskończenie głębokiej studni potencjału

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad x < 0 \text{ lub } x > a, \\ 0 & \text{dla} \quad 0 < x < a. \end{cases}$$

W chwili $t = 0$ cząstka ta jest w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax(x - a) & \text{dla} \quad 0 < x < a, \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \text{ lub } x > a. \end{cases}$$

a) Wyznaczyć stałą A.

b) Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa pomiaru energii, wyznaczyć prawdopodobieństwo, że cząstka nie znajduje się w stanie podstawowym oraz wyznaczyć średnią energię cząstki.

c) Znaleźć funkcję falową cząstki $\psi(x, t)$ dla $t > 0$.

d) Znaleźć średnie położenie cząstki $\langle x \rangle_t$ w chwili t.

Zadanie 4 (*dodatkowe*)

Cząstka o masie m porusza się w potencjale

$$V(x) = -\alpha[\delta(x) + \delta(x - a)], \quad \alpha > 0, \quad a > 0.$$

a) Pokazać, że energie stanów związanych cząstki dane są równaniem

$$e^{-\rho a} = \pm\left(1 - \frac{2\rho}{\mu}\right),$$

gdzie $\rho^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$ i $\mu = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$. Powyższe równanie rozwiązać graficznie.
b) Pokazać, że stan $\psi_0(x)$ o najniższej energii spełnia równanie $\psi_0(x) = \psi_0(a-x)$ oraz że jego energia jest mniejsza niż $-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$.

Zadanie 5 (*dodatkowe*)
Funkcję falową w chwili t można wyrazić przez funkcję falową w chwili $t = 0$ za pomocą wzoru

$$\psi(x,t) = \int dx' G(x,x',t)\psi(x'),$$

gdzie $G(x,x',t)$ jest tzw. propagatorem. Dla cząstki swobodnej o masie m propagator jest dany następującym wyrażeniem:

$$G(x,x',t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \exp\left\{-i\left[\frac{p}{\hbar}(x-x') + \frac{p^2 t}{2m\hbar}\right]\right\}.$$

a) Obliczając tę całkę, znaleźć jawne wyrażenie na $G(x,x',t)$.
b) Sprawdzić, że $G(x,x',0) = \delta(x-x')$.
c) Wykazać, że $G(x,x',t-t_0) = \int G(x,x'',t-t_1)G(x'',x',t_1-t_0)dx''$.