V seria zadań z mechaniki kwantowej I

26 października 2009

Zadanie 1

Wyznaczyć współczynniki przejścia T i odbicia R dla cząstek o masie m energii E padających z lewej strony na potencjał

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{dla} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}, \qquad V_0 > 0.$$

Sprawdzić, że $T + R = 1$. Naszkicować zależność współczynnika przejścia od energii E.

Zadanie 2

Wyznaczyć współczynniki przejścia T i odbicia R dla cząstek o masie m i energii E padających z lewej strony na potencjał

$$V(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha > 0.$$

Zadanie 3

a) Obliczyć następujące komutatory (i, j numerują składowe kartezjańskie odpowiednich wektorów) i wypisać związane z nimi zasady nieoznaczoności:

$$[\vec{L}^2, x_i], \quad [\vec{L}^2, p_i], \quad [L_i, \vec{r}^2], \quad [L_i, \vec{p}^2], \quad [L_i, \vec{r} \cdot \vec{p}].$$

b) Wykazać, że jeśli jakiś operator komutuje z dwoma składowymi kartezjańskimi operatora momentu pędu, to komutuje także z trzecią składową.
c) Sprawdzić, że

$$[H, p_x^2] = 2i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} p_x + \hbar^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

gdzie $H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$.

Zadanie 4 (*dodatkowe*)

Cząstki o masie m i energii E padają z lewej i z prawej strony na potencjał

$$V(x) = -\alpha\delta(x)$$

tak, że funkcja falowa każdej z nich ma postać

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{gdy} \quad x \to -\infty, \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & \text{gdy} \quad x \to +\infty. \end{cases}$$

a) Pokazać, że $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$ gdzie $S = \begin{pmatrix} \frac{i\epsilon}{2-i\epsilon} & \frac{2}{2-i\epsilon} \\ \frac{2}{2-i\epsilon} & \frac{i\epsilon}{2-i\epsilon} \end{pmatrix}$ oraz $\epsilon = \frac{2m\alpha}{\hbar^2 k}$.
b) Sprawdzić, że biegun macierzy S (tzn. wartość k taka, że $2 - i\epsilon = 0$) odpowiada stanowi związanemu w potencjale V.
c) Sprawdzić, że macierz S jest unitarna.

Zadanie 5 (*dodatkowe*)

Cząstka o masie m rozprasza sie na potencjale $V(x)$, który dla $x \to -\infty$ dąży do V_-, a dla $x \to +\infty$ dąży do V_+. Wykazać, że dla $E > \max\{V_-, V_+\}$ współczynniki przejścia i odbicia:
a) nie zależą od tego, z której strony cząstka pada na potencjał,
b) sumują się do jedności.
Wskazówka: Oznaczyć przez $\psi_+(x)$ rozwiązanie dla cząstki padającej z lewej strony, a przez $\psi_-(x)$ dla cząstki padającej z prawej strony. Wykazać, że: $\psi_- \frac{d\psi_+}{dx} - \psi_+ \frac{d\psi_-}{dx} = \text{const.}$, $\psi_\pm \frac{d\psi_\pm^*}{dx} - \psi_\pm^* \frac{d\psi_\pm}{dx} = \text{const}_\pm$.