Zadania z Mechaniki Kwantowej I

Seria 6

6 listopada 2009

Zadanie 1

Wyznaczyć funkcje falowe i poziomy energetyczne dla stanów stacjonarnych cząstki o masie m poruszającej się w potencjale

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - Fx$$

gdzie F jest pewną stałą. Uzasadnić, że potencjał ten odpowiada oscylatorowi harmonicznemu poddanemu dodatkowo działaniu stałej zewnętrznej siły F.

Zadanie 2

Dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego wyznaczyć komutatory $[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\mathrm{p}}]$ oraz $[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\mathrm{x}}]$. Korzystając z wyniku, pokazać, że w stanach stacjonarnych oscylatora $\langle n|\hat{\mathrm{x}}|n\rangle = \langle n|\hat{\mathrm{p}}|n\rangle = 0$.

Zadanie 3

Znaleźć stany i energie własne cząstki o masie m umieszczonej w polu potencjału

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 & \text{dla } x \geqslant 0\,; \\ \infty & \text{dla } x < 0\,. \end{cases}$$

Zadanie 4

Dla operatorów kreacji i anihilacji w problemie jednowymiarowego oscylatora, pokazać związki

$$[\hat{\mathrm{a}}, (\hat{\mathrm{a}}^\dagger)^n] = n(\hat{\mathrm{a}}^\dagger)^{n-1} \qquad \text{oraz} \qquad [\hat{\mathrm{a}}^\dagger, \hat{\mathrm{a}}^n] = -n\hat{\mathrm{a}}^{n-1}.$$

Zadanie 5

Korzystając z rozwinięcia $|\psi\rangle = \sum_i c_n|n\rangle$ (gdzie stany $|n\rangle$ oznaczają stany stacjonarne oscylatora harmonicznego) znaleźć wartości i stany własne (unormowane) operatora anihilacji

$$\hat{\mathrm{a}}|\psi\rangle = z|\psi\rangle.$$

Uwaga: operator anihilacji *nie* jest operatorem hermitowskim, więc z nie musi być rzeczywiste!
Pokazać, że nie istnieją unormowane stany własne operatora kreacji.

Zadanie dodatkowe

Zadanie 6

Niech $|n\rangle$ i E_n oznaczają stany i energie własne hamiltonianu $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{p}}^2/2m + U(x)$. Obliczyć $[\hat{\mathrm{x}}, [\hat{\mathrm{H}}, \hat{\mathrm{x}}]]$ a następnie wyliczając wartość oczekiwaną tego komutatora w stanie $|n\rangle$ wykazać, że

$$\sum_k \frac{2m}{\hbar^2} \left|\langle k|\hat{\mathrm{x}}|n\rangle\right|^2 (E_k - E_n) = 1$$