Zadania domowe z mechanika kwantowej I - 2009/2010

Seria 7 - 14 listopada 2009

Wszystkie zadania dotyczą jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m, częstości ω i $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

Zadanie 1.

a) Znaleźć funkcję falową oscylatora harmonicznego w stanie stacjonarnym w reprezentacji pędowej (obliczyć odpowiednią transformatę fourierowską przy wykorzystaniu znanej funkcji tworzącej dla wielomianów Hermite'a).

b) Wykazać, że równanie Schrödingera bez czasu dla oscylatora harmonicznego w reprezentacji położeniowej i pędowej są identyczne, jeśli przejdziemy do zmiennych bezwymiarowych $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ i $\eta = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}p_x$.

Zadanie 2.

Funkcja falowa oscylatora harmonicznego w chwili $t = 0$ ma postać

$$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{1}{105}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^2 x^4 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

a) Sprawdzić, że funkcja $\Psi(x, t = 0)$ jest dobrze unormowana.

b) Obliczyć prawdopodobieństwa pomiaru poszczególnych wartości energii tego oscylatora.

c) Znaleźć $\Psi(x, t)$ dla tego oscylatora.

Zadanie 3.

Wykorzystując odpowiednie równania Ehrenfesta wykazać, że dla oscylatora harmonicznego w dowolnym stanie średnie położenie $\langle x\rangle_t$ i średni pęd $\langle p_x\rangle_t$ oscylują zgodnie z wzorami:

$$\langle x\rangle_t = \langle x\rangle_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega}\langle p_x\rangle_0 \sin(\omega t),$$

$$\langle p_x\rangle_t = -m\omega\langle x\rangle_0 \sin(\omega t) + \langle p_x\rangle_0 \cos(\omega t).$$

Zadanie 4.

a) Uogólnić zadanie 4 z serii 6 wykazując, że dla dowolnej funkcji $f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ operatorów kreacji $\hat{a}^\dagger$ i anihilacji $\hat{a}$ rozwijalnej na szereg potęgowy zachodzą wzory

$$[\hat{a}, f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial \hat{a}^\dagger}, \quad [\hat{a}^\dagger, f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = -\frac{\partial f}{\partial \hat{a}}.$$

b) Wykazać, że dla $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{z\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-z\hat{a}} = \hat{a}^\dagger + z, \quad e^{z\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{-z\hat{a}^\dagger} = \hat{a} - z,$$

$$e^{z\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-z\hat{a}^\dagger\hat{a}} = e^{-z}\hat{a}, \quad e^{z\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}^\dagger e^{-z\hat{a}^\dagger\hat{a}} = e^{z}\hat{a}^\dagger.$$

Zadanie 5 (dodatkowe).
a) Wykazać, że w stanie stacjonarnym (czyli o określonej energii E) gęstości prawdopodobieństwa dla położenia i pędu dla oscylatora harmonicznego w mechanice klasycznej dane są wzorami

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} & |x| < a, \\ 0 & \text{pozostałe } x, \end{cases} \qquad \rho(p_x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2-p_x^2}} & |p_x| < b, \\ 0 & \text{pozostałe } p_x, \end{cases}$$

gdzie $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, $b = \sqrt{2mE}$.
b) Wykazać, że w mechanice klasycznej w stanie stacjonarnym oscylatora harmonicznego

$$\langle x \rangle = 0, \ \langle p_x \rangle = 0, \ \langle x^2 \rangle = \frac{E}{m\omega^2}, \ \langle p_x^2 \rangle = mE.$$

c) Porównać wyniki otrzymane w tym zadaniu z odpowiednimi wynikami dla oscylatora harmonicznego w mechanice kwantowej.