X seria zadań z mechaniki kwantowej I
7 grudnia 2009

Zadanie 1

Układ jest opisany hamiltonianem

$$H = A(L_x^2 + L_y^2) + BL_z^2$$

gdzie $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ jest operatorem momentu pędu natomiast A i $B \in \mathbb{R}$.

a) Znaleźć wartości własne oraz stany własne hamiltonianu.
b) Wyznaczyć $\langle L_x + L_y + L_z \rangle$ w dowolnym stanie.
c) W chwili $t = 0$ układ znajdował się w stanie $|\Psi\rangle$ takim, że

$$L^2 |\Psi\rangle = 2\hbar^2 |\Psi\rangle, \quad L_z |\Psi\rangle = \hbar |\Psi\rangle .$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku pomiaru L_x w chwili $t = \frac{2\pi}{\hbar A}$ otrzymamy wartość $-\hbar$?

Zadanie 2

Elektron znajduje się w stanie opisanym spinorem

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \cos\delta \\ e^{i\beta} \sin\delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}.$$

a) Oblilczyć wartość średnią i dyspersję dla rzutu spinu $S_n = \vec{S}\vec{n}$ na kierunek $\vec{n} = (\sin\beta, 0, \cos\beta)$.
b) Obliczyć prawdopodobieństwa $P_{1/2}$ i $P_{-1/2}$ określonych rzutów spinu na kierunek $\vec{n}$.

Zadanie 3

Dowolną stan układu dwóch cząstek o spinach 1/2 można wyrazić jako kombinację liniową stanu singletowego i trypletowego:

$$\left| \frac{1}{2}m_1, \frac{1}{2}m_2 \right\rangle = \sum_{S=0,1} \sum_{-S \le M \le S} a_{SM} |SM\rangle ,$$

gdzie m_1 i m_2 oznaczają rzuty spinów cząstek na oś Z. Znaleźć operatory rzutujące na podprzestrzeń trypletową i singletową oraz operator wymiany spinów

$$P_\sigma \left| \frac{1}{2}m_1, \frac{1}{2}m_2 \right\rangle = \left| \frac{1}{2}m_2, \frac{1}{2}m_1 \right\rangle$$

Znalezione operatory wyrazić przy pomocy iloczynu $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$.

Zadanie 4 (*dodatkowe*)

Wykazać, że efektywny potencjał elektryczny w stanie podstawowym $|\Psi_{100}\rangle$ atomu wodoropodobnego o liczbie atomowej Z dany jest wzorem

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z}{a_0} + \frac{1}{r} \right) \exp\left(-\frac{2Zr}{a_0} \right) .$$

Wskazówka: Wykorzystać wzór Coulomba $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, a gęstość ładunku przyjąć w postaci $\rho(\vec{r}) = Ze\delta(\vec{r}) - e|\Psi_{100}(\vec{r})|^2$.

Zadanie 5 (*dodatkowe*)
W obszarze, w którym znajduje się cząstka o spinie $s = 1/2$ i momencie magnetycznym $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma}$ w stanie $\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$, zostaje włączone stałe jednorodne pole magnetyczne $\vec{B}_1 = (0, 0, B)$ skierowane wzdłuż osi Z przez czas $T = \frac{\pi}{2\omega}$, gdzie $\omega = \frac{\mu_0 B}{\hbar}$, a następnie stałe jednorodne pole magnetyczne $\vec{B}_2 = (0, B, 0)$ skierowane wzdłuż osi Y również włączone przez czas T. Określić stan końcowy cząstki.