Zadania z Mechaniki Kwantowej I

Seria 11

13 grudnia 2009

Zadanie 1

Dla spinu $\frac{1}{2}$ można napisać $\hat{S}_i \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, gdzie σ_i są macierzami Pauliego. Pokazać, że ze związków komutacyjnych dla składowych momentu pędu wynikają związki komutacyjne dla macierzy Pauliego

$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$.

Pokazać, że macierze Pauliego spełniają również związki *anty*komutacyjne ($\{A, B\} \equiv AB + BA$):

$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\sigma_0$

gdzie przez σ_0 rozumiemy macierz jednostkową 2×2. Pokazać, że

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ oraz $\sigma_x\sigma_y\sigma_z = i$.

Zadanie 2

Dowolna macierz 2×2 nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych (a więc i dowolny operator działający w przestrzeni spinu jednej cząstki o spinie $\frac{1}{2}$) może być zapisana jako kombinacja liniowa czterech macierzy σ ze współczynnikami zespolonymi:

$A = a_\mu\sigma_\mu = a_0\sigma_0 + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} = a_0\sigma_0 + a_x\sigma_x + a_y\sigma_y + a_z\sigma_z$

gdzie A jest macierzą 2×2, $a_\mu \in \mathbb{C}$ są współczynnikami liczbowymi, a grecki indeks sumowania μ przebiega wartości $0, x, y, z$ (lub $0, 1, 2, 3$); macierz jednostkową 2×2 oznaczyliśmy tu symbolem σ_0. Znaleźć wzory wyrażające wspólczynniki a_μ poprzez macierz A i macierze Pauliego (skorzystać z faktu, że macierze Pauliego są bezśladowe oraz z wyników zadania pierwszego).

Zadanie 3

Dla stanów spinowych dwóch cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ (np. neutron-proton) definiujemy operator „zamiany spinu”

$\hat{P}_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_{(n)}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{(p)})$.

Pokazać, że dwucząstkowe stany tripletowe $\chi_{t+} = |\uparrow\uparrow\rangle$, $\chi_{t0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, $\chi_{t-} = |\downarrow\downarrow\rangle$ oraz stan singletowy $\chi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ są stanami własnymi tego operatora. Uzasadnić nazwę „operator zamiany spinu”, to znaczy pokazać, że $\hat{P}_\sigma|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $\hat{P}_\sigma|\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$, $\hat{P}_\sigma|\downarrow\uparrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$, $\hat{P}_\sigma|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$.

Zadanie 4

Układ dwóch unieruchomionych cząstek o spinie $\frac{1}{2}$ (na przykład elektron i proton) znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B}$ skierowanym wzdłuż osi z. Cząstki oddziałują ze sobą momentami magnetycznymi i z polem magnetycznym:

$\hat{H} = \gamma\boldsymbol{\sigma}_{(e)}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{(p)} + \mu_e\boldsymbol{\sigma}_{(e)}\cdot\mathbf{B} + \mu_p\boldsymbol{\sigma}_{(p)}\cdot\mathbf{B}$.

Znaleźć poziomy energetyczne tego układu w funkcji natężenia pola $\mathbf{B}$.

Zadanie dodatkowe

Zadanie 5

Znaleźć i przedyskutować ruch cząstki o spinie $\frac{1}{2}$ w wirującym polu magnetycznym

$\mathbf{B}(t) = [B\sin\theta\cos\omega t, B\sin\theta\sin\omega t, B\cos\theta]$.