

Zadania domowe z mechanika kwantowej I - 2009/2010

Seria 12 (19 grudnia 2009)

Zadanie 1.

Wykorzystując twierdzenie Hellmanna-Feynmana

$$\left(\psi_n, \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \psi_n\right) = \frac{\partial E_n}{\partial \lambda}$$

dla stanów związanych $\psi_n(\lambda)$ o energii $E_n(\lambda)$ układu o hamiltonianie $\hat{H}(\lambda)$ zależnym od parametru λ , obliczyć w stanach stacjonarnych trójwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego średnie $\langle r^2 \rangle$ i $\langle \frac{1}{r^2} \rangle$ oraz $\langle \hat{p}^2 \rangle$ i $\langle \hat{p}_r^2 \rangle$.

Zadanie 2.

Przy użyciu rachunku zaburzeń oszacować wpływ skończonych rozmiarów protonu na energię stanu podstawowego atomu wodoru. Przyjąć, że ładunek protonu jest rozłożony jednorodnie na powierzchni kulki o promieniu $R = 1,2 \cdot 10^{-15}$ m, i określić względną wielkość poprawki w stosunku do energii z punktowym protonem.

Wskazówka: Sprawdzić, że w tym wypadku

$$\hat{H}' = \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) & r \leq R \\ 0 & r > R. \end{cases}$$

Zadanie 3.

Przy użyciu rachunku zaburzeń z dokładnością do drugiego rzędu włącznie obliczyć poprawki do energii stanów stacjonarnych cząstki o masie m z energią potencjalną

$$V = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a, \\ \infty & \text{pozostałe } x \end{cases}$$

zaburzoną przez $V' = \alpha \delta(x - \frac{a}{2})$.

Wskazówka: Sprawdzić, że $\sum_{k=0, k \neq n}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 - (2n+1)^2} = \frac{1}{4(2n+1)^2}$. Wynik porównać z dokładnym wynikiem uzyskanym na ćwiczeniach w październiku.

Zadanie 4.

Płaski rotator o hamiltonianie $\hat{H}_0 = \frac{\hat{L}_z^2}{2I}$, I - moment bezwładności rotatora, został zaburzony przez $\hat{H}' = V_0 \cos(2\varphi)$. Przy użyciu rachunku zaburzeń:

- znaleźć poprawkę do energii rotatora w stanie podstawowym (do drugiego rzędu włącznie) i odpowiadającą jej funkcję falową do pierwszego rzędu włącznie,
- znaleźć poprawki do energii rotatora w pierwszym stanie wzbudzonym (do pierwszego rzędu włącznie) i odpowiadające im funkcje falowe w zerowym rzędzie.

Zadanie 5 (dodatkowe).

Przeanalizować liniowe zjawisko Starka dla stanów atomu wodoropodobnego z $n = 3$. Wyznaczyć rozszczepienie poziomów energetycznych i odpowiadające im funkcje falowe. Funkcje falowe dla atomu wodoropodobnego dla $n = 3$ można znaleźć w podręczniku I. Białynickiego-Biruli et al. lub R. Liboffa.