XIV seria zadań z mechaniki kwantowej I
17 stycznia 2010

Zadanie 1

Cząstka o masie m rozprasza się na potencjale

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{dla} \quad r \leq a, \\ 0 & \text{dla} \quad r > a, \end{cases}$$

gdzie $V_0 > 0$.
a) Wyznaczyć przesunięcie fazowe δ_0 dla rozpraszania w stanie $l = 0$ przy $E < V_0$ (skorzystać z równania radialnego dla $\chi(r) = rR(r)$).
b) Wyznaczyć i przedyskutować różniczkowy i całkowity przekrój czynny w granicy $E \to 0$.

Zadanie 2

W przybliżeniu Borna obliczyć różniczkowy i całkowity przekrój czynny na rozpraszanie cząstek o energii E na potencjale $V(r) = V_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, $a > 0$.

Zadanie 3

Rozważyć cząstkę o ładunku q i masie m, poruszającą się w płaszczyźnie Oxy w stałym polu magnetycznym $\vec{B} = B\vec{e}_z$ prostopadłym do płaszczyzny ruchu. Wybrać cechowanie symetryczne: $\vec{A} = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0\right)$. Pokazać, że układ ma symetrię osiową t.j., że hamiltonian H cząstki komutuje z trzecią składową operatora momentu pędu: $[H, L_z] = 0$. Znaleźć energie własne cząstki i stany własne diagonalizujące jednocześnie operatory H i L_z.
Wskazówka: Skorzystać z operatorów:

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\Omega}} \left[p_x - ip_y - \frac{m\Omega}{2i}(x - iy) \right], \quad a = (a^\dagger)^\dagger,$$

gdzie $\Omega = \frac{|q|B}{m}$ jest częstością cyklotronową.

Zadanie 4 (*dodatkowe*)

a) Wykazać, że w przybliżeniu Borna amplituda rozpraszania cząstki punktowej o ładunku Q_1 na obiekcie rozciągłym o gęstości ładunku $\rho_{\text{lad}} = Q_2\rho(\vec{r})$, gdzie $\int \rho(\vec{r}) d^3r = 1$, wynosi $f(\vec{q}) = f_R(\vec{q})F(\vec{q})$, gdzie $f_R(\vec{q}) = -\frac{\mu Q_1 Q_2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2 q^2}$ jest amplitudą Rutherforda na rozpraszanie cząstek punktowych w przybliżeniu Borna, a $F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}} d^3r$ nazywa się czynnikiem struktury (formfaktorem) obiektu rozciągłego. Sprawdzić, że dla dowolnego rozkładu ładunku mamy $F(\vec{0}) = 1$.
b) Sprawdzić, że dla cząstki punktowej ($\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$) mamy $F(\vec{q}) \equiv 1$.
c) Wykazać, że czynnik struktury dla sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku wynosi $F(q) = \frac{4\pi}{q} \int r\rho(r) \sin(qr) dr$.
(Wielkość $\vec{q} = \vec{k'} - \vec{k}$ charakteryzuje przekaz pędu w rozpraszaniu.)

Zadanie 5 (*dodatkowe*)

Obliczyć w przybliżeniu Borna różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie elastyczne mionu na atomie wodoru w stanie podstawowym, czyli na ładunku o gęstości $\rho_{\text{lad}} = e[\delta(\vec{r}) - |\psi_{100}(\vec{r})|^2]$. Wykorzystać pojęcie czynnika struktury z poprzedniego zadania lub wyniki zadania domowego 4 z serii X.