Warszawa, 25.09.2009

Ramowy program ćwiczeń z mechaniki kwantowej I

Ćwiczenia I–III – uzupełnienia matematyczne

1. Przypomnieć (krótko) podstawowe pojęcia: przestrzeń wektorowa, przestrzeń unitarna, zbiory ortonormalne i zupełne (bazy), przestrzeń Hilberta.

2. Ortogonalizacja Grama-Schmidta – formalna konstrukcja bazy ortonormalnej.

3. Rozwiązać zagadnienie własne dla operatora pędu (w jednym wymiarze):

   - znaleźć rozwiaznie na odcinku $\langle -L/2, L/2\rangle$ z periodycznymi warunkami brzegowymi (baza *pędowa*):
   $$\varphi_n(x) = A_n e^{2\pi i n x/L} \quad \text{gdzie} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{1}$$
   Podkreślić *kwantowanie* wektora falowego $k_n = \frac{2\pi n}{L}$
   - unormować $\varphi_n(x)$ oraz pokazać, że funkcje $\varphi_n(x)$ są ortonormalne $\langle \varphi_n(x)|\varphi_k(x)\rangle = \delta_{nk}$
   - wykorzystując ortonormalność funkcji $\varphi_n(x)$ dokonać formalnego rozkładu dowolnej funkcji $f(x)$ w *bazie*
   $$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad \text{gdzie} \quad c_n = \langle \varphi_n(x)|f(x)\rangle, \tag{2}$$
   a następmie dokonać rozkładu konkretnej funkcji określonej na odcinku $\langle -L/2, L/2\rangle$ np.
   $$f(x) = |x| \quad \text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} \;\;1 & \text{dla} \quad x \in \langle -L/2, 0\rangle \\ -1 & \text{dla} \quad x \in \langle 0, \quad L/2\rangle \end{cases} \tag{3}$$
   w bazie pędowej (czyli w szereg Fouriera). Powiedzieć czego należy oczekiwać w punktach nieciągłości $f(x)$. Pokazać, że $\sum_n |c_n|^2 = 1$ dla unormowanej funkcji $f(x)$.
   - znaleźć rozwiazanie swobodne w całej przestrzeni, $\varphi_k(x) = A_k e^{ikx}$ numerowane ciągłym parametrem $k \in \mathbf{R}$; powiązać z transformatą Fouriera $A_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; podkreślić kłopoty z normalizacją. Sens czynnika normalizacyjnego $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ wyjaśni się przy dyskusji funkcji $\delta-$Diraca.
   - uogólnić równane własne dla pędu na przypadek 3D i rozwiązać je stosując metodę separacji zmiennych.

4. Omówić funkcję $\delta-$Diraca od strony praktycznej (!) tj. traktując ją jako obiekt nabierający *sensu* pod całką. W szczególności:

   - wypisać najczęściej używane modele funkcji $\delta-$Diraca i omówić przynajmniej jeden z nich. Pokazać, że modele te są tworzone z funkcji $g(x)$ wg. schematu:
   $$\int dx\, g(x) = 1, \qquad g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \delta(x) \tag{4}$$
   - podać i uzasadnić takie podstawowe własności funkcji $\delta-$Diraca jak:
   $$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{5}$$
   $$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i) \tag{6}$$
   $$\delta(\vec{\eta} - \vec{\eta}^{(0)}) = \frac{1}{|J(\vec{x}, \vec{\eta})|}\delta(\eta_1 - \eta_1^{(0)})\delta(\eta_2 - \eta_2^{(0)})\delta(\eta_2 - \eta_2^{(0)}) \tag{7}$$
   gdzie x_i są pojedyńczymi pierwiastkami $f(x_i) = 0$ zaś $J(\vec{x}, \vec{\eta})$ oznacza Jakobian przekształcenia.

- podać reprezentację całkową wiążąc ją z wprowadzoną powyżej transformatą Fouriera (normalizacja do funkcji $\delta-$Diraca.
- i reprezentację różniczkową (funkcja schodkowa i jej pochodna)

5. Wykorzystując funkcję schodkową i reprezentację różniczkową funkcji $\delta-$Diraca obliczyć średnie wartości pędu i energii kinetycznej (1D):

$$\langle \Phi(x)|\hat{p}|\Phi(x)\rangle, \quad \langle \Phi(x)|\hat{T}|\Phi(x)\rangle, \tag{8}$$

w stanie ($\lambda > 0$ ustalona stała)

$$\Phi(x) = Ae^{-\lambda|x|} \tag{9}$$

Funkcję unormować. Zrobić analizę wymiarową dla A i λ. Użyteczność funkcji z nieciągłą pochodną przy modelowaniu funkcji (paczek) falowych wyjaśni się w praktyce, w następnej serii ćwiczeń.

Ćwiczenia IV–VII – zagadnienia jednowymiarowe

1. Rozważyć jednowymiarową gaussowską paczkę falową:

$$\Psi(x, t = 0) = Ae^{-\frac{(x-x_o)^2}{2a^2}+ik_o x}. \tag{10}$$

Unormować f.f. Obliczyć, w reprezentacji położeniowej, średnie warości położenia $\langle\hat{x}\rangle$ i pędu $\langle\hat{p}\rangle$ oraz dyspersje σ_x i σ_p. Przedyskutować zasadę nieoznaczoności. Znaleźć transformatę Fouriera $\tilde{\Psi}(k, t = 0)$. Wykorzystując tw. Parsevala (podajemy bez dowodu) oraz wyniki na średnie położenie i pęd obliczone w reprezentacji położeniowej wydedukować postać operatorów położenia i pędu w reprezentacji pędowej. Omówić ewolucję (rozpływanie) pakietu falowego w czasie.

2. Rozważyć ruch cząstki o masie m w prostokątnej studni potencjału:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |x| < a \\ V_o > 0 & \text{dla} \quad |x| > a. \end{cases} \tag{11}$$

Przedyskutować symetrię względem odbicia przestrzennego i jej konsekwencje. Wykorzystując parzystość znaleźć stany związane ($E < V_o$) tj. wyznaczyć (graficznie) energie własne i obliczyć unormowane funkcje własne. Pokazać, że stany rozproszeniowe ($E > V_o$) tworzą widmo ciągłe. Dokonać przejścia granicznego $V_o \to +\infty$ do prostokątnej studni o nieprzenikalnych ścianach. Przedyskutować modyfikację warunków brzegowych.

3. Rozważyć cząstkę o masie m znajdującą się w nieskończonej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < x < L \\ \infty & \text{dla pozostałych} \quad x \end{cases}, \tag{12}$$

której stan opisuje, w chwili $t = 0$, następująca funkcja falowa:

$$\Phi(x, t = 0) = \begin{cases} A\sin^5(\frac{\pi x}{L}) & \text{dla} \quad 0 < x < L \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad x \end{cases}, \tag{13}$$

gdzie A jest dodatnią stałą rzeczywistą. Obliczyć rozkład prawdopodobieństwa pomiaru energii i wartość średnią energii w tym stanie w chwili $t = 0$. Znaleźć $\Phi(x, t)$ i obliczyć średnią wartość energii w dowolnej chwili czasu t. Przy normowaniu wykorzystać wzór:

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi \tag{14}$$

4. Rozważyć cząstkę o masie m poruszającą się w jednowymiarowej studni potencjału:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |x| < a \\ +\infty & \text{dla} \quad |x| > a, \end{cases}$$

którą przegrodzono częściowo przepuszczalną barierą

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\Omega\delta(x).$$

Zbadać wpływ przegrody na energie i funkcje własne hamiltonianu cząstki [przedyskutować szczegółowo funkcję falową stanu podstawowego] w zależności od parametru przepuszczalności bariery Ω.

Ćwiczenia VIII–XI

Rozpraszanie jednowymiarowe i zjawisko tunelowania
Operatory kwantowo-mechaniczne, komutatory, sprzężenie hermitowskie etc
Oscylator harmoniczny we współrzędnych kartezjańskich

1. Rozważyć cząstkę o masie m i energii $E > 0$, padającą z lewej strony na barierę potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x > a \\ V_o > 0 & \text{dla} \quad a > x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Omówić zjawisko tunelowe ($0 < E < V_o$) i zjawisko rozpraszania rezonansowego Ramsauera-Townsenda ($E > V_o$).

2. Operatory kwantowo-mechaniczne, relacje komutacji, sprzężenie hermitowskie:

- Wykorzystując zasadę odpowiedniości Bohra wprowadzić operator momentu pędu i obliczyć $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$. Wykorzystąć komutator $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$.
- Omówić pojęcie (sens) funkcji od operatora $f(\hat{A})$. Pokazać, że jeżeli $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ to $[f(\hat{A}), \hat{B}] = 0$.
- Obliczyć komutatory $[\hat{\boldsymbol{r}}, f(\hat{\boldsymbol{p}})] = i\hbar\boldsymbol{\nabla}_p f(\boldsymbol{p})$ i $[\hat{\boldsymbol{p}}, f(\hat{\boldsymbol{r}})] = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}_r f(\boldsymbol{r})$.
- Wykorzystując wzory otrzymane powyżej obliczyć: $[\hat{x}_i, \hat{\boldsymbol{p}}^2]$, $[\hat{L}_i, \hat{x}_j]$, $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$
- Rozważyć parę operatorów $\hat{A}, \hat{B}$ spełniających następujące związki komutacyjne:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \tag{16}$$

  Udowodnić, że dla tej pary zachodzi następująca relacja

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}, \tag{17}$$

  znana w literaturze pod nazwą wzoru Bakera-Campbella-Hausdorfa (BCH).
- Obliczyć analitycznie $\frac{\partial}{\partial x}^\dagger$ i pokazać, że $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$. Pokazać, że: $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$;

3. Rozważyć cząstkę o masie m poruszającą się w jednowymiarowym potencjale oscylatora harmonicznego $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Znaleźć rozwiązanie (funkcje i wartości własne) metodą wielomianów Sommerfelda. Wypisać funkcję generującą dla wielomianów Hermite'a:

$$S(\xi, s) = e^{-s^2+2s\xi} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!}s^n. \tag{18}$$

Pokazać, że współczynniki rozwinięcia H_n we wzorze (18) spełniają równanie Hermite'a znalezione powyżej. Wykorzystując funkcję generującą dla wielomianów Hermite'a znaleźć podstawowe relacje rekurencyjne:

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi), \tag{19}$$
$$H'_n(\xi) = 2nH_{n-1}(\xi), \tag{20}$$

i reprezentację różniczkową wielominów Hermite'a. Pokazać, że funkcje falowe oscylatora są ortogonalne, tj. że wielomiany Hermite'a są ortogonalne z wagą gaussowską. Unormować funkcję falową.

4. Rozważyć cząstkę o masie m poruszającą się w trójwymiarowym potencjale oscylatora harmonicznego:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\omega_i^2 x_i^2. \tag{21}$$
Rozseparować zmienne. Wypisać funkcje własne i energie własne. Obliczyć stopień zwyrodnienia poziomów energetycznych oscylatora izotropowego (sferycznego) i omówić efekt znoszenia degeneracji przy redukcji symetrii sferycznej do symetrii osiowej $\omega_x = \omega_y \neq \omega_z$. Jako ciekawostkę pokazać co się dzieje gdy $\frac{\omega_x}{\omega_z} = \frac{1}{2}$ lub $\frac{\omega_x}{\omega_z} = 2$.

Ćwiczenia X–XIV

Oscylator harmoniczny - wykorzystanie operatorów kreacji i anihilacji. Moment pędu. Ruch w polu sił centralnych.

1. Znaleźć stany koherentne[1]:
$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \tag{22}$$
rozwiązując analitycznie rów. różniczkowe (22). Obliczyć wartości oczekiwane położenia i pędu w stanie $|z\rangle$. Udowodnić relację zupełności:
$$1 = \frac{1}{\pi}\int d^2z\,|z\rangle\langle z|. \tag{23}$$
Pokazać jak stan $|z\rangle$ ewoluuje w czasie.

2. Wprowadzić operatory kreacji i anihilacji dla oscylatora harmonicznego dwu- (2D) i trójwymiarowego (3D). Dla oscylatora 3D policzyć elementy macierzowe: $\langle n'_x n'_y n'_z|\hat{L}_z|n_x n_y n_z\rangle$. Omówić reguły wyboru i ogólne zasady prowadzące do efektywnego liczenia elementów macierzowych przy wykorzystaniu operatorów kreacji i anihilacji.

3. Rozważyć podprzestrzeń stanów własnych izotropowego oscylatora harmonicznego o energii własnej $\frac{5}{2}\hbar\omega$. W tej podprzestrzeni skonstruować stany własne operatorów $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ i $\hat{L}_z$. Pokazać związek otrzymanych stanów z harmonikami dipolowymi.

4. Sformułować zasadę nieoznaczoności dla operatorów $\hat{L}_x$ i $\hat{L}_y$. [2] Spośród stanów własnych $|\ell m\rangle$ operatorów $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ i $\hat{L}_z$, wybrać te, w których można najdokładniej zmierzyć jednocześnie składowe $\hat{L}_x$ i $\hat{L}_y$.

5. Znaleźć funkcje i wartości własne trójwymiarowego oscylatora harmonicznego przez sprowadzenie równania radialnego do postaci równania hipergeometrycznego konfluentnego.

[1] Na wykładzie wprowadziłem operatory kreacji i anihilacji dla oscylatora w 1D.

[2] Na wykładzie sformułowem ogólną zasadę nieoznaczoności: $\sigma_{\hat{A}}^2\sigma_{\hat{B}}^2 \geq \frac{1}{4}|[\hat{A},\hat{B}]|^2$ dla dowolnych operatorów hermitowskich $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

Ćwiczenia XV–XIX

Radialne i kątowe rozkłady prawdopodobieństwa. Atom wodoru. Algebra momentu pędu. Spin 1/2. Całkowity moment pędu. Składanie spinów dwóch cząstek: stany singletowy i trypletowy.

1. Wyprowadzić wzór na radialny rozkład prawdopodobieństwa $P(\ell, m; r)$ w dowolnym stanie $\Psi(r, \theta, \varphi)$, scałkowany rozkład $P(\ell, m)$ i jego wariant w stanie, który faktoryzuje się na części radialną i kątową $\Psi(r, \theta, \varphi) = F(r)\Theta(\theta, \varphi)$. Przedyskutować radialny rozkład prawdopodobieństwa w stanie podstawowym atomu wodoru. Pokazać, że maksimum rozkładu odpowiada promieniowi Bohra a nie, jak by się naiwnie wydawało, średniemu położeniu $\langle 1s|r|1s\rangle$.

2. Rozważyć cząstkę opisaną funkcją falową: $\Psi(r, \theta, \varphi) = f(r) \sin\theta$. W tym stanie obliczyć:
   - $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_z \rangle$
   - $P(\ell = 2, m = 0)$, $P(\ell = 2)$, $P(\ell = 2k + 1, m = 0)$ gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Rozważyć cząstkę opisaną funkcją falową:
   - $\Psi(r, \theta, \varphi) = f(r)e^{2i\varphi}$,
   - $\Psi(x, y, z) = N(ix + 2y - z)e^{-\frac{1}{2}(\frac{r}{a})^2}$.

   W tych stanach obliczyć rozkład prawdopodobieństwa $P(\ell, m)$ oraz wartości oczekiwane $\langle \hat{L}_z \rangle$ i $\langle \hat{L}^2 \rangle$. Uwaga, w pierwszym z przypadków $\langle \hat{L}^2 \rangle$ jest logarytmicznie rozbieżne, co można także pokazać korzystając z jawnej postaci $\hat{L}^2$ i wykonując bezpośrednie całkowanie we współrzędnych sferycznych. Wyjaśnić dlaczego tak się dzieje!

4. Cząstka znajduje się w stanie kwantowym $|\ell m\rangle$. Na układzie dokonano pomiaru rzutu, $\hat{L}_{z'}$, wektora orbitalnego momentu pędu na oś Oz' tworzącą z osią Oz kąt α. Obliczyć wartości oczekiwane: $\langle \hat{L}_{z'} \rangle$ i $\langle \hat{L}^2_{z'} \rangle$.

5. Cząstkę o spinie 1/2 i momencie magnetycznym $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu_o \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ umieszczono, w chwili $t = 0$, w stałym polu magnetycznym $\boldsymbol{B} = B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z$. Znaleźć i przedyskutować ewolucję czasową stanu cząstki przyjmując, że w chwili $t = 0$ znajduje się ona w stanie $|1/2, 1/2\rangle$. Znaleźć prawdopodobieństwo odwrócenia spinu w funkcji czasu. Przedyskutować granice: $B_y > 0, B_z \to 0$ i $B_z > 0, B_y \to 0$

6. Rozważyć zagadnienie dwóch cząstek o spinach 1/2. Znaleźć współczynniki Clebscha-Gordana przejścia od bazy iloczynowej do bazy sprzężonej $|S, M; s^{(1)}, s^{(2)}\rangle$ diagonalizującej operatory: $\hat{\boldsymbol{S}}^2 = (\hat{\boldsymbol{s}}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{s}}^{(2)})^2$ i $\hat{S}_z = \hat{s}^{(1)}_z + \hat{s}^{(2)}_z$, oraz $(\hat{\boldsymbol{s}}^{(1)})^2$ i $(\hat{\boldsymbol{s}}^{(2)})^2$.

7. Hamiltonian dwóch nieruchomych cząstek o spinie 1/2 każda dany jest wzorem:
   $$\hat{H} = A(\hat{s}^{(1)}_z + \hat{s}^{(2)}_z) + B\hat{\boldsymbol{s}}^{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}^{(2)}, \tag{24}$$
   gdzie A i B są stałymi. Znaleźć poziomy energetyczne układu [3].

8. Znaleźć energie własne i odpowiadające im spinowe funkcje własne układu proton-antyproton. Cząstki są nieruchome i znajdują się w odległości r od siebie, a ich oddziaływanie opisuje hamiltonian:
   $$\hat{H} = g\left[\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(2)} - \frac{3(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(1)} \cdot \boldsymbol{r})(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{r})}{r^2}\right], \tag{25}$$
   w którym g jest stałą, a $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ i $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ są momentami magnetycznymi odpowiednio protonu i antyprotonu.

9. *Zadanie nieobowiązkowe do domu:* Przedyskutować ruch cząstki o spinie 1/2 w wirującym polu magnetycznym: $\boldsymbol{B} = [B \sin\theta \cos\omega t, B \sin\theta \sin\omega t, B \cos\theta]$.

[3] Może warto wspomnieć o iloczynie tensorowym (prostym) podprzestrzeni i operatorów i rozwiązać to zadanie wykorzystując ten formalizm. Pozostawiam to waszej decyzji.

Ćwiczenia XX–XXIII
Rozwiązania przybliżone: stacjonarny rachunek zaburzeń.

1. Wyznaczyć, w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, poprawki energetyczne do energii własnych izotropowego dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego wywołane zaburzeniem:
$$\delta\hat{V}(x,y) = \varepsilon xy. \tag{26}$$
Obliczenia wykonać dla stanów o głównej liczbie kwantowej $N=2$. [4] Energie porównać z wynikami ścisłymi. Wypisać właściwe funkcje falowe.

2. Wprowadzić wzór Feynmana-Hellmana. Korzystając z tego wzoru obliczyć poprawkę relatywistyczną do energii własnych atomu wodoru. Jako poprawkę do energii kinetycznej przyjąć pierwszy człon rozwinięcia relatywistycznej energii kinetycznej:
$$T_{rel} = mc^2\sqrt{\frac{p^2}{m^2c^2}+1} - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}. \tag{27}$$

3. (*W przypadku braku czasu – do domu*) Traktując potencjał Yukawy
$$U_Y(r) = -\frac{\alpha}{r}e^{r/a} \quad \text{gdzie} \quad \alpha > 0 \quad \text{i} \quad \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \gg 1 \tag{28}$$
jako zaburzenie potencjału Coulomba $U_C(r) = -\frac{\alpha}{r}$ znaleźć, w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, poziomy energetyczne w dolnej części widma. Uwzględnić dwa najniższe człony rozwinięcia $U_Y(r)$ wokół $U_C(r)$. Podać warunek stosowalności procedury do $n-$tego poziomu energetycznego.
Wsk.: $\langle n\ell m|r|n\ell m\rangle = \frac{1}{2}a_o(3n^2 - \ell(\ell+1))$.

4. Znaleźć, w drugim rzędzie rachunku zaburzeń, poprawkę do poziomów energetycznych naładowanego rotatora o momencie bezwładności $\Im$ i momencie dipolowym $\vec{d}$ umieszczonego w stałym, słabym polu elektrycznym $\vec{E} = E\vec{e}_z$.

5. Rozważyć molekułę wodoru. Wyprowadzić wzór na oddziaływanie dipolowe (van der Waalsa) pomiędzy atomami wodoru tworzącymi molekułę. Korzystając z rachunku zaburzeń obliczyć energię wiązania molekuły zakładając, że atomy wodoru są w stanach podstawowych. Przedyskutować rolę spinowej funkcji falowej (antysymetryzacja).

6. Omówić, w ramach rachunku zaburzeń w pierwszym rzędzie, efekt Zeemana w stanie $2p$ (n=2, ℓ = 1) atomiu wodoru traktując:
$$\delta\hat{V} = \frac{\xi}{\hbar^2}\hat{\vec{\ell}}\cdot\hat{\vec{s}} - \frac{1}{\hbar}\hat{\vec{\mu}}\cdot\vec{B}. \tag{29}$$
jako zaburzenie.[5]

Ćwiczenia XXIV–XXVI
Metody przybliżone: rachunek wariacyjny, WKB, zaburzenia zależne od czasu

1. Cząstka o masie m porusza się w polu sił o potencjale $V(x) = F|x|$ gdzie $F > 0$. **a)** Wyznaczyć górną granicę na energię stanu podstawowego przy użyciu funkcji próbnej $\Psi(x) = Ae^{-\alpha|x|}$, gdzie $\alpha > 0$ jest parametrem wariacyjnym. **b)** Oszacować energię stanu podstawowego wykorzystując przybliżenie WKB. Porównać otrzymane wyniki.

[4] Przypadek N=3 można dać do domu.
[5] Do domu proponuje dać ruch we wzajemnie prostopadłych, słabych polach elektrycznym i magnetycznym.

2. Oszacować metodą WKB czas połowicznego zaniku dla rozpadu α jądra radu: ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\alpha$. Potencjał przybliżyć wzorem:

$$V(r) = \begin{cases} -V_o & \text{dla} \quad r < r_o, \\ \frac{Z_\alpha Z_{Rn} e^2}{r} & \text{dla} \quad r \geq r_o. \end{cases} \tag{30}$$

Przyjąć, że promień jądra wynosi $r_o \approx 1.2A^{1/3}$ fm, energia rozpadu jest równa $E_\alpha = 4.78\,\mathrm{MeV}$, a emitowana cząstka α ma moment pędu $\ell = 0$. Pokazać, że dla rozpadu zachodzi następujące prawo $\ln T_{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$ znane jako (empiryczne) prawo Geigera-Nutalla.

3. Oszacować prawdopodobieństwo jonizacji atomu wodoru umieszczonego w zewnętrznym polu elektrycznym: $\vec{E}(t) = 2\vec{E}_o \sin \omega t$. Przedyskutować rozkład kątowy emitowanych elektronów.

Ćwiczenia XXVII–XXVIII

Rozpraszanie: przybliżenie Borna i metoda fal parcjalnych

1. Obliczyć przesunięcia fazowe δ_ℓ dla rozpraszania na potencjale $\frac{\alpha}{r^2}$, $\alpha > 0$. Obliczyć amplitudę rozpraszania i różniczkowy przekrój czynny dla małych wartości α. Porównać uzyskany wynik z wynikiem otrzymanym w przybliżeniu Borna.

2. Obliczyć wkład od fali s ($\ell = 0$) do całkowitego przekroju czynnego dla rozpraszania niskoenergetycznych cząstek o $ka \gg 1$ na przyciągającym ($\Omega > 0$) potencjale:

$$V(r) = -\Omega\delta(r - a). \tag{31}$$

Przedyskutować otrzymany wynik dla $\frac{2m\Omega a}{\hbar^2} \rightarrow 1$.

Wojciech Satuła