1 Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

Są różne rodzaje nieskończoności, mimo iż nieskończoność oznacza się jednym symbolem. Ale nieskończoność nieskończoności nierówna. Uzasadnimy to zaraz; ale najsampierw kilka definicji.

Def. Mówimy, że dwa zbiory X, Y są *równoliczne*, jeśli istnieje bijekcja α zbioru X na zbiór Y.

Przykł. Dwa zbiory skończone są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą ilość elementów.

Def. Zbiór X nazywamy *przeliczalnym*, jeśli jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

Obrazowo mówimy, że X jest przeliczalny, jeśli wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg, albo też, jeśli wszystkie jego elementy można ponumerować liczbami naturalnymi.

Przykł. Zbiór $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ jest przeliczalny. Łatwo bowiem skonstruować bijekcję α zbioru X na $\mathbb{N}$:

$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = 3, \ldots, \alpha(k) = k + 1, \ldots$$

RYS. Można powyższą bijekcję zapisać symbolicznie jako

$$1 + \infty = \infty$$

Przykł. Zbiór liczb parzystych $\mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ jest przeliczalny. Bijekcję $\alpha : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}$ można skonstruować tak:

$$\alpha(2) = 1, \quad \alpha(4) = 2; \quad \alpha(6) = 3; \ldots, \alpha(2k) = k, \ldots$$

RYS. Bardzo podobnie pokazuje się, że zbiór liczb *nieparzystych* też jest przeliczalny.

Sytuację tę można zobrazować pisząc

$$\infty + \infty = \infty$$

Przykł. Zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny. Bijekcja $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$:

$$\alpha(0) = 1; \quad \alpha(1) = 2; \quad \alpha(-1) = 3; \quad \alpha(2) = 4; \quad \alpha(-2) = 5; \ldots, \alpha(k) = 2k, \alpha(-k) = 2k+1, \ldots$$

Przykł. Zbiór $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. Ustawmy bowiem jego elementy w ciąg:

$$\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), \ldots\}$$

RYS. Aby dać upust pedantyczności, zapiszmy tę bijekcję wzorkiem (-ami):

Parze (a, b) przyporządkowujemy numer $\frac{1}{2}[(a+b)^2 - a - 3b] + 1$. Trochę jest gimnastyki przy sprawdzaniu, ale sprawdza się, że odwzorowanie $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: $(a, b) \to \frac{1}{2}[(a + b)^2 - a - 3b] + 1$ jest bijekcją.

Znów to symbolicznie podsumowujemy pisząc

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

Przykł. Z powyższego przykładu łatwo wynika, że *zbiór liczb wymiernych (na razie, powiedzmy, dodatnich) jest przeliczalny.* Bowiem każdą liczbę wymierną $\frac{p}{q}$ można zakodować jako parę liczb naturalnych (p, q), gdzie p i q są nieskracalne; a zbiór takich par stanowi podzbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Przykł. Zbiór liczb rzeczywistych na odcinku $[0, 1]$ NIE jest przeliczalny.

W celu udowodnienia tego stwierdzenia posłużmy się układem dwójkowym zapisu liczby, i zauważmy, że każdą liczbę rzeczywistą z przedziału $[0, 1]$ można zapisać jako pewien ciąg zer i jedynek (cyfr po przecinku rozwinięcia dwójkowego liczby). Przypuśćmy, ze liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 1]$ są przeliczalne, tzn. dadzą się ustawić w pewien ciąg $\{a^1, a^2, \dots\}$. Pokażemy, że istnieje liczba rzeczywista x, która *nie jest* elementem powyższego ciągu.

W tym celu zapiszmy rozwinięcia dziesiętne wszystkich liczb:

$$\begin{array}{lclllllll}
a^1 & = & (a_1^1 & , & a_2^1 & , & a_3^1 & , & \dots) \\
a^2 & = & (a_1^2 & , & a_2^2 & , & a_3^2 & , & \dots) \\
\vdots & & & & & & & & \\
a^k & = & (a_1^k & , & a_2^k & , & a_3^k & , & \dots) \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

(tu a_j^i jest $j-$tą cyfrą rozwinięcia dwójkowego liczby a^i). Liczbę x konstruujemy następująco:

Jeśli na pierwszym miejscu rozwinięcia dziesiętnego liczby a^1 jest 0, to jako pierwszą cyfrę rozwinięcia dziesiętnego x bierzemy 1; i na odwrót. (tzn. jeśli $a_1^1 = 0$, to $x_1^1 = 1$; oraz jeśli $a_1^1 = 1$, to $x_1^1 = 0$). Liczba x zatem nie jest równa a^1.

jeśli $a_2^2 = 0$, to $x_2^2 = 1$; oraz jeśli $a_2^2 = 1$, to $x_2^2 = 0$). Liczba x zatem nie jest równa a^1 ani a^2.

Itd.; ogólnie:

jeśli $a_k^k = 0$, to $x_k^k = 1$; oraz jeśli $a_k^k = 1$, to $x_k^k = 0$). Liczba x zatem nie jest równa a^1 , a^2, ... a_k.

W ten sposób znaleźliśmy liczbę x, która nie jest równa *żadnemu* wyrazowi ciągu $\{a^1, a^2, \dots\}$, co świadczy, że ciąg ten *nie zawiera* wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$. A zatem zbiór tych liczb *nie jest* przeliczalny.

CBDO

2 Całka podwójna w prostokącie

2.1 Prostokąty, ich podziały, objętość dwuwymiarowa

Niech $f(x, y)$ będzie ograniczoną funkcją określoną na prostokącie domkniętym P, gdzie P jest dany nierównościami $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

Def. *Objętością* (dwuwymiarową) $|P|$ prostokąta nazywamy iloczyn jego boków:

$$|P| = (b - a)(d - c)$$

Def. *Wnętrzem* prostokąta P nazywamy zbiór określony nierównościami ostrymi:

$$\mathrm{Int}\, P = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}$$

Podzielmy prostokąt P na n dowolnych prostokątów domkniętych $p_1, p_2, \dots, p_n$. Tzn. mamy:

$$P = \cup_{i=1}^n p_i, \qquad \mathrm{Int}\, p_i \cap \mathrm{Int}\, p_j = \emptyset \quad \text{dla } i \neq j.$$

Def. Powyższe rozbicie prostokąta na mniejsze nazywamy *podziałem* π, tzn..

$$\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \tag{1}$$

Zachodzi:

$$|P| = |p_1| + |p_2| + \dots |p_n|.$$

Niech π – podział P oraz $\pi_1 = \{q_1, \dots, q_k\}$ – inny podział P. Mówimy, że π_1 jest *drobniejszy* niż π, jeżeli

$$p_i = q_{i_1} \cup q_{i_2} \cup \dots q_{i_m}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Niech prostokąt p_i ma boki a_i, b_i. Definiujemy *średnicę* podziału π (1 jako

$$\delta_\pi = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{a_i, b_i\}.$$

2.2 Zbiory o zerowej objętości

Def. Niech $X \subset \mathbb{R}^2$. Mówimy, że X ma miarę Lebesgue'a równą zeru (lub, że X jest miary zero), jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taki ciąg prostokątów $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, że

$$X \subset \bigcup_i P_i \quad \text{oraz} \quad \sum_i |P_i| < \epsilon$$

Przykł.

1. Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ jest zbiorem miary zero.
2. Skończony zbiór punktów w R^2 jest zbiorem miary zero.
3. Odcinek o skończonej długości α jest zbiorem miary 0. (można go zawrzeć w prostokącie o długości α i dowolnie małej wysokości).
4. Każdy przeliczalny zbiór punktów $D \subset R^2$ jest zbiorem miary zero. *dow.* Ponumerujmy elementy D: $D = d_1 \cup d_2 \cup \dots$, a następnie pokryjmy każdy element d_k kwadracikiem o bokach ϵ^{-k}; suma pól powierzchni tych kwadracików jest dana szeregiem geometrycznym $\sum_k \epsilon^{-2k} = \frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2}$, jest więc skończona i można ją uczynić dowolnie małą.
5. Weźmy $\mathbb{R}^1$; zbiór liczb wymiernych jest miary zero (jako że jest przeliczalny).

2.3 Definicja całki

Niech M i m będą kresami górnymi i dolnymi odpowiednio funkcji f w prostokącie P, zaś M_i oraz m_i – kresami górnymi i dolnymi funkcji f w prostokącie p_i. Niech ξ_i^1, ξ_i^2 będzie dowolnym punktem prostokąta p_i. Zbiór wszystkich punktów $\{\xi_i^1, \xi_i^2\}, i = 1, \dots, n$ nazwijmy *wypunktowaniem* podziału π i nazwijmy ξ. Utwórzmy – analogicznie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej – trzy sumy:

$$\underline{S}(f, \pi) = m_1|p_1| + m_2|p_2| + \dots + m_n|p_n| = \sum_{i=1}^{n} m_i|p_i|; \tag{2}$$

($suma\ dolna$),

$$\sigma(f,\pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^1,\xi_i^2) \tag{3}$$

($suma\ wypunktowana$), oraz

$$\bar{S}(f,\pi) = M_1|p_1| + M_2|p_2| + \cdots + M_n|p_n| = \sum_{i=1}^{n} M_i|p_i| \tag{4}$$

($suma\ górna$).

Analogicznie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, spełniają one nierówności

$$m|P| \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \sigma(f,\pi,\xi) \leqslant \bar{S}(f,\pi) \leqslant M|P|. \tag{5}$$

Również analogicznie, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, definiujemy *całkę górną* oraz *dolną*:

Def. *Całką górną* z funkcji f nazywamy infimum z $\bar{S}(f,\pi)$ po wszystkich możliwych podziałach:

$$\overline{\int_P} f = \inf_{\pi} \bar{S}(f,\pi)$$

i analogicznie *całką dolną* z funkcji f nazywamy

$$\underline{\int_P} f = \sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi)$$

i także podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, definiujemy *funkcje całkowalne*:

Def. Mówimy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna*, jeżeli całki: górna i dolna są równe:

$$\underline{\int_P} f = \overline{\int_P} f.$$

W takim przypadku tę wspólną granicę oznaczamy jako $\int_P f$.

Mają miejsce następujące twierdzenia (dowodzi się ich analogicznie jak dla funkcji jednej zmiennej):

Tw. Niech f – funkcja ograniczona na prostokącie P. Jeżeli f jest całkowalna na P w sensie Riemanna, to dla dowolnego ciągu $\{\pi_k\}$ podziałów P takiego, że $\delta_{\pi_k} \stackrel{k\to\infty}{\to} 0$, ciąg wypunktowanych sum Riemanna jest zbieżny do $\int_P f$ niezależnie od sposobu wypunktowania.

Zachodzi też twierdzenie (prawie) odwrotne:

Tw. Niech f – funkcja rzeczywista na prostokącie P. (*Uwaga.* Nie zakładamy, że f musi być ograniczona). Jeżeli dla dowolnego ciągu $\{\pi_k\}$ podziałów P takiego, że $\delta_{\pi_k} \stackrel{k\to\infty}{\to} 0$ ciąg wypunktowanych sum Riemanna jest zbieżny do granicy niezależnej od sposobu wypunktowania, to f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna.

Oczywiste jest

Tw. Jeśli P jest sumą (mnogościową) dwu prostokątów P_1, P_2 o rozłącznych wnętrzach, a f jest funkcją całkowalną na P, to

$$\int_P f = \int_{P_1} f + \int_{P_2} f$$

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, dowodzi się

Tw. Niech f, g – funkcje całkowalne na P oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy całkowalne na P są też funkcje $f + g$ oraz λf, przy czym zachodzą równości

$$\int_P (f+g) = \int_P f + \int_P g, \tag{6}$$

$$\int_P \lambda f = \lambda \int_P f. \tag{7}$$

Zapytajmy teraz:

2.4 Jakie funkcje na pewno są całkowalne?

Analogicznie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, dowodzimy, że są całkowalne funkcje *ciągłe*:

Tw. Jeżeli f jest ciągła na prostokącie P, to jest całkowalna (tzn. istnieje $\int_P f$).

Również niektóre *nieciągłe* funkcje są całkowalne. Dokładniej, ma miejsce

Tw. Jeżeli funkcja f na prostokącie P jest ograniczona i posiada zbiór punktów nieciągłości miary 0, to jest całkowalna.

Dow. Niech $\mathcal{N}$ będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji f. Weźmy ciąg rodzin $\{\Pi_k\}$ prostokątów pokrywających $\mathcal{N}$. Zakładamy, że każdy element rodziny (tzn. zbiór prostokątów) jest skończony. Oznaczmy przez $\Pi_{k,j}$ $j-$ty prostokąt $k-$tej rodziny oraz przez ϵ_k – pole powierzchni zbioru prostokątów Π_k, tzn. $\epsilon_k = \sum_j |\Pi_{k,j}|$. Zakładamy, że $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$, ponieważ z założenia $\mathcal{N}$ jest zbiorem miary zero. Każdy zbiór Π_k uzupełniamy do podziału π_k prostokąta P tak, by był spełniony warunek $\lim_{k\to\infty} \delta_{\pi_k} = 0$.

Niech $M = \sup_P f$, $m = \inf_P f$. Zdefiniujmy funkcje f^+, f^- następująco. Definiujemy f^+: Jeśli $x \in \Pi_k$, to $f^+(x) = M$, a jeśli $x \notin \Pi_k$, to $f^+(x) = f(x)$. Analogicznie dla f^-: Jeśli $x \in \Pi_k$, to $f^-(x) = M$, a jeśli $x \notin \Pi_k$, to $f^-(x) = f(x)$. Zauważmy, że f^+ i f^- są całkowalne. Weźmy jakieś wypunktowanie ξ_k podziału π_k. Mamy: $S(f^-, \pi_k, \xi_k) \leqslant S(f, \pi_k, \xi_k) \leqslant S(f^+, \pi_k, \xi_k)$; różnica pomiędzy dwoma skrajnymi wyrazami jest równa $\epsilon_k \cdot (M - m)$ i dąży do zera, gdy $k \to \infty$, bo wtedy $\epsilon_k \to 0$. Zatem oba skrajne wyrazy dążą do wspólnej wartości niezależnej od podziału ξ_k. Tak więc granica wyrazu środkowego istnieje i jest niezależna od wypunktowania, czyli f jest całkowalna.

CBDO

2.5 Interpretacja geometryczna całki

Wiele całek posiada wyrazisty sens geometryczny lub fizyczny[1]. Aby bardziej to sprecyzować, wprowadzimy pojęcie *miary Jordana* podzbiorów $\mathbb{R}^n$; zacznijmy od $\mathbb{R}^2$.

[1] Nic dziwnego, bo pojęcie całki było odpowiedzią na zapotrzebowania ze strony fizyki bądź matematyki, a w szczególności geometrii...

Niech D będzie obszarem lub dowolnym zbiorem płaskim ograniczonym. Zawrzyjmy go w pewnym kwadracie Q. Weźmy jakiś podział $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ prostokąta Q. Oznaczmy:

1. Niech S_π będzie sumą pól tych prostokątów, które zawierają jakiś punkt zbioru D;

2. Niech s_π będzie sumą pól tych prostokątów, które są zawarte w zbiorze D. Jeśli takich prostokątów należaćych do podziału nie ma, to przyjmujemy $s_\pi = 0$.

RYS. Mamy oczywiste nierówności:

$$0 \leqslant s_\pi \leqslant S_\pi \leqslant |Q|.$$

Zbiór wszystkich sum S_π, odpowiadających różnym podziałom kwadratu Q, ma *kres dolny* (jako zb. ograniczony z dołu). Ten kres dolny oznaczmy S_D i nazywamy *miarą zewnętrzną* zbioru D:

$$S_D = \inf_\pi S_\pi$$

Analogicznie zbiór wszystkich sum s_π ma *kres górny* (jako zb. ograniczony z góry), który oznaczamy s_D i nazywamy *miarą wewnętrzną* zbioru D:

$$s_D = \sup_\pi s_\pi$$

Oczywiście zachodzi: $s_D \leqslant S_D$. Jeżeli zachodzi *równość*:

$$s_D = S_D,$$

to zbiór D nazywamy *mierzalnym powierzchniowo* w sensie Jordana, a wspólną wartość obu miar nazywamy *miarą płaską Jordana* (lub po prostu *polem powierzchni*, lub *objętością dwuwymiarową*) zbioru D.

Analogicznie definiuje się miarę Jordana w innych wymiarach (w jednym wymiarze wpisuje się w zbiór i opisuje na nim odcinki; w trzech wymiarach – prostopadłościany, co prowadzi do pojęcia *objętości trójwymiarowej*. Itd.)

Miara Jordana jest bardzo intuicyjnym pojęciem, ale ma tę wadę, że może nie istnieć już w przypadku nieco 'udziwnionych' zbiorów; i tak np. nie istnieje miara Jordana zbioru liczb wymiernych na odcinku $[0, 1]$ (miara wewnętrzna jest tu 0, a zewnętrzna 1). Ale do celów całkowania funkcji, z którymi będziemy mieć do czynienia, pojęcie miary Jordana nam wystarczy[2].

Będąc uzbrojeni w pojęcie miary Jordana, łatwo zobaczymy interpretację geometryczną całki:

Niech $f \equiv f(x, y)$ będzie funkcją całkowalną i dodatnią w prostokącie P. Wówczas zbiór $V \in \mathbb{R}^3$, określony nierównościami:

$$a \leqslant x \leqslant b; \quad c \leqslant y \leqslant d; \quad 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$$

[2] Do mierzenia takich 'dziwniejszych' zbiorów wprowadza się *miarę Lebesgue'a*. Jest ona skuteczniejsza niż miara Jordana: Gdy zbiór jest mierzalny w sensie Jordana, to jest też mierzalny wg Lebesgue'a (np. miara Lebesgue'a zb. liczb wymiernych na $[0, 1]$ jest 0). Miara Lebesgue'a obejmuje znakomitą większość przypadków, z którymi przychodzi zetknąć się w fizyce (aczkolwiek są zbiory niemierzalne również w sensie Lebesgue'a!) ale wymaga nieco zahartowania w abstrakcji. Definicje można znaleźć np. w książce F. Lei, 'Rachunek różniczkowy i całkowy'.

ma dobrze określoną objętość, bo całka górna równa jest mierze zewnętrznej zbioru V, zaś całka dolna – mierze wewnętrznej, a ponieważ f jest całkowalna, to miary te są równe. Oznaczając objętość (trójwymiarową miarę Jordana) zbioru V jako V, mamy więc

$$|V| = \int_P f. \tag{8}$$

2.6 Całki iterowane

Niech $f \equiv f(x, y)$ tędzie funkcją określoną i ograniczoną w prostokącie P, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Niech przy każdym ustalonym x istnieje całka pojedyncza

$$\phi(x) \equiv \int_c^d f(x, y)\mathsf{d}y. \tag{9}$$

Całka ta jest funkcją zmiennej x i jest określona w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$; oznaczamy ją jako $\phi(x)$. Jeżeli $\phi(x)$ jest całkowalna na $[a, b]$, to całkę

$$\int_a^b \phi(x)\mathsf{d}x \equiv \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\mathsf{d}y\right] \mathsf{d}x \overset{inne\ ozn.}{=} \int_a^b \mathsf{d}x \int_c^d \mathsf{d}y\, f(x, y) \tag{10}$$

nazywamy *całką iterowaną* funkcji $f(x, y)$ (liczoną w kolejności: najpierw po y a potem po x).

Analogicznie określamy całkę iterowaną, liczoną w drugiej możliwej kolejności (najpierw po x a potem po y): Określamy funkcję $\psi(y)$ przez

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y)\mathsf{d}x$$

przy założeniu, że przy każdym $y \in [c, d]$ ta całka istnieje, a następnie

$$\int_c^d \psi(y)\mathsf{d}y \equiv \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\mathsf{d}x\right] \mathsf{d}y \overset{inne\ ozn.}{=} \int_c^d \mathsf{d}y \int_a^b \mathsf{d}x\, f(x, y) \tag{11}$$

Przykł.

2.7 Zamiana całki podwójnej na iterowaną (tw. Fubiniego)

Oprócz oznaczenia $\int_P f$ na całkę z funkcji f po prostokącie P, często zachodzi potrzeba jawnego wypisania argumentów funkcji, i wtedy posługujemy się równoważnym oznaczeniem:

$$\int_P f = \int\int_P f(x, y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y.$$

W poprzednim przykładzie obie całki iterowane okazały się być równe. Ten fakt jest nieprzypadkowy. Ma bowiem miejsce

Tw. Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w prostokącie P, to obie całki iterowane (10) i (11) istnieją i są równe całce podwójnej:

$$\int_a^b \mathsf{d}x \int_c^d \mathsf{d}y\, f(x, y) = \int_P f(x, y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_c^d \mathsf{d}y \int_a^b \mathsf{d}x\, f(x, y) \tag{12}$$

Dow. Podzielmy prostokąt P na $m \times n$ prostokątów, dzieląc przedział $[a, b]$ $(m+1)$ punktami $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ na m przedziałów $p_i^x = [x_{i-1}, x_i]$ i analogicznie, przedział $[c, d]$ dzielimy $(n+1)$ punktami $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ na n przedziałów $p_j^y = [x_{j-1}, x_j]$, i rysując odcinki równoległe do osi x, y przechodzące przez punkty podziału. **RYS.**. Przez Δx_i oznaczmy długość przedziału p_i^x oraz przez Δy_k – długość przedziału p_k^y. Zakładamy przy tym, że $\lim_{m\to\infty}(\sup_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta x_i) \to 0$ i analogicznie $\lim_{n\to\infty}(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta y_k) \to 0$. Dla prostokąta $P_{ik} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$, niech m_{ik} (odpowiednio M_{ik}) oznaczają kres dolny (odp. górny) funkcji f na P_{ik}. Niech ξ_i oznacza dowolny punkt przedziału Δx_i, oraz niech $\phi(x)$ będzie zdefiniowana przez (9). Naówczas mamy:

$$\phi(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\mathsf{d}y = \int_c^{y_1} f(\xi_i, y)\mathsf{d}y + \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_i, y)\mathsf{d}y + \cdots + \int_{y_{n-1}}^{d} f(\xi_i, y)\mathsf{d}y$$

Mamy też: $m_{ik} \leqslant f(\xi_i, y) \leqslant M_{ik}$ dla $y \in [y_{k-1}, y_k]$, co prowadzi do ciągu nierówności:

$$m_{i1}\Delta y_1 \leqslant \int_c^{y_1} f(\xi_i, y)\mathsf{d}y \leqslant M_{i1}\Delta y_1,$$

$$m_{i2}\Delta y_2 \leqslant \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_i, y)\mathsf{d}y \leqslant M_{i2}\Delta y_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{in}\Delta y_n \leqslant \int_{y_{n-1}}^{d} f(\xi_i, y)\mathsf{d}y \leqslant M_{in}\Delta y_n.$$

Dodając te nierówności stronami, a następnie mnożąc przez Δx_i i sumując po i, otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \phi(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i. \tag{13}$$

Pierwsza (lewa) z tych sum jest sumą dolną, a ostatnia (prawa) – sumą górną dla funkcji f w prostokącie P; środkowa zaś jest sumą wypunktowaną funkcji $\phi(x)$ w przedziale $[a, b]$. Weźmy teraz granicę $m \to \infty$, $n \to \infty$; wtedy najdłuższy z odcinków Δx_i, Δy_k dąży do zera, a sumy skrajne z nierówności (13) dążą do wspólnej granicy – całki podwójnej z funkcji f. Suma środkowa dąży więc do tej samej granicy, przy czym ta granica jest całką iterowaną (10). W ten sposób pokazaliśmy pierwszą z równości (12). Dowód drugiej równości jest analogiczny.

CBDO

Uwagi.

1. W powyższym dowodzie korzystaliśmy jedynie z założeń, że

   - Istnieje całka podwójna $\displaystyle\iint_P f(x, y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, oraz
   - istnieje całka pojedyncza $\phi(x) = \int_c^d f(x, y)\mathsf{d}y$ dla każdego $x \in [a, b]$;

   dlatego też teza twierdzenia pozostaje słuszna również przy tych słabszych założeniach – jeśli są one spełnione, to np. f nie musi być ciągła.

2. Gdy f jest ciągła, to powyższe tw. mówi, że wszystkie trzy całki (podwójna i obie iterowane) są równe. Gdy f *nie jest* ciągła, to mogą się zdarzyć różne sytuacje; np. jedna z całek istnieje, a inne nie; albo gdy istnieją, to nie są równe. Przykłady są w III tomie Fichtenholza.

Twierdzenie Fubiniego odgrywa ważną rolę przy efektywnym wyliczaniu całek (nie tylko zresztą tam), ponieważ sprowadza obliczanie całki podwójnej do obliczenia dwóch całek pojedynczych.

Przypadek szczególny: Gdy $f(x, y)$ jest iloczynem dwu funkcji, z których każda zależy od jednej zmiennej: $f(x, y) = u(x)v(y)$, to mamy

$$\iint\limits_P f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \left(\int_a^b u(x)\,\mathsf{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d v(x)\,\mathsf{d}y\right), \tag{14}$$

bo:

$$\iint\limits_P f(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_a^b \mathsf{d}x\left[\int_c^d \mathsf{d}y\,u(x)v(y)\right] = \int_a^b \mathsf{d}x\left[u(x)\int_c^d \mathsf{d}y\,v(y)\right]$$

a to jest iloczyn całek występujący po prawej stronie równości (14).

2.8 Całka podwójna w zbiorze dowolnym

Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną w pewnym zbiorze ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^2$ (**RYS.**) Zawrzyjmy D w pewnym prostokącie P i funkcję f, określoną na D, rozszerzmy do funkcji f_0 określonej na całym prostokącie P w ten sposób, że

$$f_0(x,y) = f(x,y) \ \text{ dla } \ (x,y)\in D; \quad f_0(x,y) = 0 \ \text{ dla } \ (x,y)\notin D. \tag{15}$$

Def. Mówimy, że f jest *całkowalna na zbiorze* D, jeśli istnieje całka $\iint\limits_P f_0(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y$. W takim przypadku, całkę z funkcji f na zbiorze D oznaczamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y \tag{16}$$

i, zgodnie z powyższą definicją, mamy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \iint\limits_P f_0(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y. \tag{17}$$

Łatwo zobaczyć, że określenie to nie zależy od wyboru prostokąta P.

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją nieujemną na zbiorze D. Oznaczmy przez V zbiór punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ określony nierównościami

$$0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \qquad \text{dla} \qquad (x,y)\in D. \tag{18}$$

Suma górna dla całki (17) jest sumą objętości prostopadłościanów zawierających zbiór V, zaś suma dolna – sumą objętości prostopadłościanów zawartych w V. Jeśli więc całka (20) istnieje, to zbiór V jest *mierzalny objętościowo* i jego objętość wyraża się całką

$$|V| = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y \tag{19}$$

Przypadek szczególny: Zauważmy, że objętość prostopadłościanu o wysokości 1 równa jest polu podstawy. Biorąc teraz $f(x,y) \equiv 1$ w całym zbiorze D, widzimy, że suma górna dla całki (20) jest sumą pól prostokątów zawierających zbiór D, a suma dolna – sumie pól prostokątów zawartych w D. Stąd otrzymujemy

Stw. Jeśli $f(x,y) \equiv 1$, to całka (20) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór płaski jest mierzalny powierzchniowo. Pole obszaru D wyraża się wówczas całką

$$\int\!\!\int_D \mathsf{d}x\mathsf{d}y. \tag{20}$$

Wiemy, że są zbiory niemierzalne; i w związku z tym na pewno *nie* po każdym obszarze będziemy mogli całkować. Nasuwa się wobec tego pytanie, całkę po *jakich* obszarach będzie istniała?

Znakomita większość obszarów, z którymi mamy do czynienia w fizyce, są to obszary ograniczone przez krzywe ciągłe. Będziemy się zajmować krzywymi, które można zadać równaniem $y = f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą. Najsampierw pokażmy:

Stw. Krzywa o równaniu $y = f(x)$, gdzie f – ciągła oraz $x \in [a,b]$, ma dwuwymiarową miarę Jordana równą zeru.

Dow. Wiemy, że funkcja $f(x)$ na odcinku domkniętym jest tam *jednostajnie* ciągła. Skoro tak, to przedział można podzielić na skończoną ilość odcinków takich, że na każdym z nich wahanie funkcji (tzn. różnica między wartością najmniejszą i największą) jest dowolnie mała; weźmy np. $\frac{\epsilon}{b-a}$, gdzie ϵ jest zadaną dowolnie małą nieujemną liczbą. Całą krzywą na przedziale $[a,b]$ można więc pokryć prostokątami o łącznej podstawie $b-a$ i wysokości $\frac{\epsilon}{b-a}$, więc o łącznym polu ϵ dowolnie małym. **RYS.**

CBDO

Zdefiniujmy jeszcze:

Def. Obszar regularny to taki, który jest ograniczony skończoną ilością krzywych o równaniu $y = f(x)$ lub $x = g(y)$, gdzie f, g – ciągłe.

Ze Stw. pokazanego wyżej wyciągamy wniosek:

Wniosek Obszar regularny D jest mierzalny.

Dow.

Jeśli S_n jest sumą pól prostokątów pokrywających obszar D, a s_n – sumą pól prostokątów zawartych w D, to $S_n - s_n$ jest sumą pól prostokątów pokrywających brzeg obszaru, tzn. krzywą ograniczającą obszar. Z dowodu poprzedniego stw. widzimy, zę ta różnica jest dowolnie mała – tak więc obszar jest mierzalny.

CBDO

2.9 Całka podwójna w obszarze regularnym

Z faktów pokazanych wyżej łatwo wynika

Stw. Funkcja $f(x,y)$ ograniczona i ciągła w obszarze regularnym D jest całkowalna.

Dow. Zawrzyjmy obszar D w jakimś prostokącie P i rozszerzmy funkcję f do funkcji f_0 na P w standardowy sposób dany przez (15). Wtedy f_0 jest nieciągła co najwyżej na brzegu obszaru D, tak więc w myśl tw. CO BYŁO dowodzone ok. 2 STRONY WCZESNIEJ, a mówiącego o całkowalności funkcji nieciągłych, takich, że zbiór ich punktów nieciągłości jest miary zero – jest całkowalna na P, a to znaczy, że f jest całkowalna na D.

CBDO

Podzielmy obszar D jakąś krzywą γ na dwa obszary regularne D_1 i D_2; mamy więc $D = D_1 \cup D_2$ (**RYS.**). Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ograniczoną i ciągła na D. Zawrzyjmy D w pewnym prostokącie P i niech:

$$f_0(x,y) = f(x,y) \quad \text{na} \quad D, f_0(x,y) = 0 \quad \text{na} \quad P \setminus D;$$

$$f_1(x,y) = f(x,y) \quad \text{na} \quad D_1, f_1(x,y) = 0 \quad \text{na} \quad P \setminus D_1;$$

$$f_2(x,y) = f(x,y) \quad \text{na} \quad D_2 \setminus \gamma, f_0(x,y) = 0 \quad \text{na} \quad (P \setminus D_2) \cup \gamma.$$

Wtedy: $f_0 = f_1 + f_2$ w całym prostokącie P, zatem z wzoru (6) dla obszarów prostokątnych mamy

$$\int_P f_0 = \int_P f_1 + \int_P f_2$$

co jest równoważne – biorąc pod uwagę definicje funkcji f_1 i f_2 – równości

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f. \tag{21}$$

2.10 Obszar normalny i całki iterowane tamże

Def. Obszar regularny D określony nierównościami

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \phi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \tag{22}$$

gdzie $\phi(x)$ i $\psi(x)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$ oraz zachodzi: $\phi(x) < \psi(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$, nazywamy *obszarem normalnym* względem osi x. **RYS.**

Okaże się zaraz, że ma miejsce

Stw. Całkę z funkcji $f(x,y)$ ograniczonej i ciągłej w obszarze normalnym (22) można zamienić na całkę iterowaną według wzoru

$$\int\int_D f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_a^b \mathsf{d}x \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathsf{d}y \tag{23}$$

Dow. Zawrzyjmy obszar D w prostokącie P, gdzie $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Rozszerzmy funkcję f na D do funkcji (też nazwijmy ją f) na P, kładąc $f(x,y) = 0$ w punktach prostokąta P nie należących do obszaru D. Całka po lewej stronie wzoru (23) jest równa $\int\int_P f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$. Do tej całki można stosować tw. Fubiniego dla obszarów prostokątnych; mamy więc:

$$\int\int_D f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_a^b \mathsf{d}x \int_c^d \mathsf{d}y f(x,y). \tag{24}$$

Całkę wewnętrzną rozłóżmy teraz, przy jakimś ustalonym x, na trzy całki:

$$\int_c^d f(x,y)\mathsf{d}y = \int_c^{\phi(x)} f(x,y)\mathsf{d}y + \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathsf{d}y + \int_{\psi(x)}^d f(x,y)\mathsf{d}y$$

Pierwsza i trzecia z powyższych całek są równe zeru, bo dla y w przedziałach $y \in [c, \phi(x)]$ oraz $y \in [\psi(x), d]$ funkcja podcałkowa jest równa zeru. Uwzględniając to we wzorze (24), otrzymujemy to co mieliśmy pokazać, czyli wzór (23).

Przykł.

Uwaga. Jeżeli obszar regularny D daje się podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych D_1, D_2, $\ldots$, D_n, to całka w obszarze D równa się sumie całek po poszczególnych obszarach D_i (na mocy wzoru (21).

2.11 Odwzorowania $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i przekształcenia osiowe

Podrozdział ten w istotny sposób korzysta z definicji i twierdzeń dotyczących odwzorowań, więc dla Czytelnika wygodne będzie przypomnienie sobie treści rozdziału temu poświęconego. Tu w wolnej chwili zostaną przytoczone twierdzenia, z których będzie korzystane.

Def. Odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u,v) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$, określone wzorem:

$$\begin{cases} x &= \phi(u,v) \\ y &= v \end{cases} \tag{25}$$

gdzie ϕ jest różniczkowalna w sposób ciągły, nazywamy *przekształceniem osiowym.*

Uwaga. Z bezpośredniego rachunku wynika, że pochodna (macierz Jacobiego) odwzorowania Φ jest:

$$D\Phi = \begin{bmatrix} \phi_u & \phi_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a jakobian, czyli wyznacznik tejże macierzy, jest

$$|D\Phi| = \phi_u \tag{26}$$

Dla tych, co znają definicję permutacji:

Def. Ogólniej, *przekształceniem osiowym* obszaru $n-$wymiarowego Δ nazywamy dwzorowanie Φ : $\mathbb{R}^n \supset \Delta \ni (u^1,u^2,\ldots,u^n) \to (x^1,x^2,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n$, nazywamy odwzorowanie określone tak: $x^i = \phi(u^1,u^2,\ldots,u^n)$ dla pewnego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ (tu $\phi(u^1,\ldots,u^n)$ jest funkcją n zmiennych klasy C^1), a dla pozostałych zmiennych $x^1,\ldots,x^n$ (oprócz x^i) odwzorowanie jest określone przez: $x^j = u^{\pi(j)}$, π – pewna permutacja zbioru $(n-1)-$elementowego, zaś $j = 1,2,\ldots,n$ (oprócz jednej liczby $k \in \{1,2,\ldots,n\}$).

A ci, co nie znają def. permutacji, niech poznają, a jeśli nie, to niech się zadowolą poniższym przykładem.

Przykł. Odwzorowania $\Phi, \Gamma : \mathbb{R}^3 \ni (u,v,w) \to (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, określone równaniami

$$\Phi : \begin{cases} x &= \phi(u,v,w) \\ y &= v \\ z &= w \end{cases} \qquad \text{czy też :} \qquad \Gamma : \begin{cases} x &= w \\ y &= \psi(u,v,w) \\ z &= u \end{cases}$$

(gdzie ϕ, ψ są funkcjami klasy C^1) są przekształceniami osiowymi.

Wykażemy teraz

Stw. Odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u,v) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$, określone jako:

$$\begin{cases} x &= \phi(u,v) \\ y &= \psi(u,v) \end{cases}$$

daje się w otoczeniu każdego punktu (u_0,v_0), gdzie $|DF(u_0,v_0)| \neq 0$, przedstawić jako złożenie dwu przekształceń osiowych.

Dow. Pochodna (tzn. macierz Jacobiego) odwzorowania F jest równa

$$DF = \begin{bmatrix} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{bmatrix}$$

więc aby wyznacznik $|DF|$ był różny od zera, musi być $\phi_u \neq 0$ lub $\phi_v \neq 0$. Załóżmy, że więc $\phi_u(u_0, v_0) \neq 0$. Skoro tak, to (z tw. o funkcji uwikłanej) można w otoczeniu punktu (u_0, v_0) jednoznacznie rozwiązać równanie $x = \phi(u, v)$ względem u, tzn. wyrazić u jako funkcję od x, v:

$$u = g(x, v).$$

Funkcja $g(x, v)$ spełnia:

$$g(\phi(u, v), v) = u \tag{27}$$

Niech teraz odwzorowania $T : (u, v) \to (\xi, \eta)$ oraz $S : (\xi, \eta) \to (x, y)$ (oba więc $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) będą określone następująco:

$$T : \begin{cases} \xi &= \phi(u, v) \\ \eta &= v \end{cases} \qquad S : \begin{cases} x &= \xi \\ y &= \psi(g(\xi, \eta), \eta) \equiv \Psi(\xi, \eta) \end{cases} \tag{28}$$

gdzie w odwzorowaniu S funkcja g jest określona przez (27).

Oba odwzorowania S i T są odwzorowaniami osiowymi. Zachodzi też:

$$F = S \circ T \tag{29}$$

bowiem z bezpośredniego rachunku wynika, że:

$$x = \xi = \phi(u, v); \qquad y = \psi(g(\xi, \eta), \eta)|_{(\xi,\eta)=T(u,v)} = \psi(g(\phi(u, v), v), v) = \psi(u, v)$$

(w ostatniej równości skorzystaliśmy z własności (27) funkcji g). Znaleźliśmy więc szukane przedstawienie odwzorowania F jako złożenia dwu przekształceń osiowych.

CBDO

Uwaga. Analogiczna sytuacja ma miejsce w wyższych wymiarach: Odwzorowanie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ w otoczeniu punktu, gdzie jego macierz Jacobiego jest nieosobliwa, daje się przedstawić jako złożenie n przekształceń osiowych.

Naszkicujemy sposób postępowania dla $n = 3$. Zapiszmy $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w składowych jako:

$$\begin{cases} x &= \phi(u, v, w) \\ y &= \psi(u, v, w) \\ z &= \chi(u, v, w) \end{cases} \tag{30}$$

Zakładamy, że w punkcie (u_0, v_0, w_0) macierz Jacobiego $DG(u_0, v_0, w_0)$ jest nieosobliwa. Skoro tak, to przynajmniej jedna z pochodnych cząstkowych składowej ϕ jest różna od zera; przyjmijmy, że $\phi_u \neq 0$. Wobec tego możemy równanie $x = \phi(u, v, w)$ rozwiązać względem u; oznaczmy: $u = g(x, v, w)$. Odwzorowanie G można wtedy zapisać w postaci złożenia dwóch przekształceń:

$$\begin{cases} \xi &= \phi(u, v, w) \\ \eta &= v \\ \zeta &= w \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x &= \xi \\ y &= \psi(g(\xi, \eta, \zeta), \eta, \zeta) \\ z &= \chi(g(\xi, \eta, \zeta), \eta, \zeta) \end{cases}$$

Pierwsze z nich jest przekształceniem osiowym, a drugie daje się znowu rozłożyć na iloczyn dwóch przekształceń osiowych.

Rozkład dowolnego odwzorowania na iloczyn przekształceń osiowych jest ważne, bo tego rozkładu używa się w dowodzie wzoru na *zamianę zmiennych w całkach wielokrotnych.*

2.12 Tw. o zamianie zmiennych w całkach podwójnych

Niech $F : \mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u,v) \to (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \phi(u,v) \\ y & = & \psi(u,v) \end{array} \right. \tag{31}$$

gdzie Δ oraz D są obszarami regularnymi.

Niech w obszarze D będzie określona funkcja $f(x,y)$, ograniczona i ciągła. Zachodzi:
Tw. Jeżeli:

1. Odwzorowanie F jest klasy C^1 w obszarze zawierającym obszar Δ i jego brzeg Γ;

2. F odwzorowuje Δ na D bijektywnie;

3. jakobian DF wewnątrz obszaru Δ jest różny od zera,

to zachodzi wzór

$$\int\int_D f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int\int_\Delta f(\phi(u,v),\psi(u,v))|DF|\,\mathsf{d}u\mathsf{d}v \tag{32}$$

gdzie (aby wszystko mieć pod ręką)

$$DF = \left[\begin{array}{cc} \phi_u & \phi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{array} \right] \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Uwaga. Wzór ten jest odpowiednikiem wzoru na zamianę zmiennych w całkach z funkcji jednej zmiennej, które też tu dla wygody przypomnimy:

Niech funkcja φ klasy C^1 będzie bijekcją odcinka $[c,d]$ na $[a,b]$; niech $x = \varphi(t)$, oraz $\varphi(c) = a$ i $\varphi(d) = b$. Wtedy dla dowolnej funkcji f ciągłej na $[a,b]$ zachodzi:

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}x = \int_c^d f(\varphi(t)) \left|\frac{\mathsf{d}\varphi}{\mathsf{d}t}\right| \mathsf{d}t \tag{33}$$

Wzór ten zaraz będziemy wykorzystywać, bo dowód wzoru (32) sprowadzimy, za pomocą przekształceń osiowych, do dwukrotnego użycia wzoru (33).

Dow. Z tw. udowodnionego w poprzednim podrozdziale, odwzorowanie F określone przez (31) daje się rozłożyć na iloczyn dwu odwzorowań osiowych; załóżmy, iż realizujemy to za pomocą wzorów (28) i (29). Niech $T : \Delta \to G$, zaś $S : G \to D$ **RYS.**. Z tw. o wyznaczniku iloczynu macierzy, oraz z wzoru (26) na jakobian przekształcenia osiowego, mamy wyrażenie na jakobian odwzorowania F: $|DF| = \phi_u \Psi_\eta$.

Niech $D_1, D_2, \ldots, D_n$ będą prostokątami zawartymi w D, przecinającymi się co najwyżej na brzegach. Załóżmy, że różnica pól $|D| - \sum_{i=1}^n |D_i|$ jest mniejsza niż ϵ – dowolnie zadana liczba. Niech prostokąt D_i będzie określony nierównościami $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$. Oznaczmy:

$$I = \int\int_D f(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y, \qquad I_i = \int_a^b \mathsf{d}x \int_c^d \mathsf{d}y\, f(x,y);$$

mamy: $|I - \sum_{i=1}^n I_i| < M\epsilon$, gdzie $M = \sup\limits_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$.

Zauważmy, że przekształcenie S odwzorowuje na prostokąt D_i pewien obszar G_i, ograniczony *prostymi* $\xi = a$, $\xi = b$ oraz krzywymi $\eta = \gamma(\xi)$, $\eta = \delta(\xi)$, **RYS.** gdzie $\gamma(\xi)$ i $\delta(\xi)$ są rozwiązaniami równania $\Psi(\xi, \eta) = c$ oraz $\Psi(\xi, \eta) = d$ względem η dla $a \leqslant \xi \leqslant b$. Przy tym zachodzi: $\gamma(\xi) < \delta(\xi)$, gdy $\Psi_\eta > 0$, oraz $\gamma(\xi) > \delta(\xi)$, gdy $\Psi_\eta < 0$.

Zastosujmy teraz do całki I_i zamianę zmiennych określoną przez odwzorowanie S. Ponieważ, będąc osiowym, *jest ono identycznościowe w zmiennej* x, otrzymujemy, używając wzoru (33) na zamianę zmiennych w całce z funkcji jednej zmiennej:

$$I_i = \int_a^b \mathsf{d}\xi \int_{\gamma(\xi)}^{\delta(\xi)} f(\xi, \Psi)\Psi_\eta \mathsf{d}\eta = \int\int_{G_i} f(\xi, \Psi)\Psi_\eta \mathsf{d}\xi\mathsf{d}\eta.$$

Gdy ma miejsce sytuacja $\Psi_\eta < 0$, to przed ostatnią całką należy dopisać minus. Obie sytuacje można objąć jednym wzorem:

$$I_i = \int\int_{G_i} f(\xi, \Psi)|\Psi_\eta| \mathsf{d}\xi\mathsf{d}\eta.$$

Gdy teraz weźmiemy ciąg wypełnień prostokątami obszaru D tak, że $\sum_{i=1}^n |D_i| \to |D|$, to zachodzi: $\sum_{i=1}^n |G_i| \to |G|$ oraz $\sum_{i=1}^n I_i \to I$; otrzymujemy stąd:

$$I = \int\int_{G} f(\xi, \Psi)|\Psi_\eta| \mathsf{d}\xi\mathsf{d}\eta. \tag{34}$$

A teraz! Do otrzymanej powyżej całki zastosujmy pierwsze przekształcenie, tzn. T, przekształcające obszar Δ na obszar G. Postępujemy w sposób analogiczny jak wyżej, bo T też jest przekształceniem osiowym; otrzymujemy:

$$I = \int\int_{\Delta} f(\phi(u, v), \psi(u, v))|\Psi_\eta||\phi_u| \,\mathsf{d}u\mathsf{d}v.$$

A ponieważ $\Psi_\eta \phi_u$ jest iloczynem jakobianów obu przekształceń S i T, to mamy $\Psi_\eta \phi_u = |DF|$. Otrzymaliśmy więc wzór (32).

CBDO

Uwaga. W trzech (i więcej) wymiarach postępujemy analogicznie: Korzystamy z rozkładu odwzorowania na iloczyn trzech (n) przekształceń osiowych, i postępujemy jak wyżej – tylko nie dwa, a trzy (n) razy.

Przykł.

Przykł. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathsf{d}x$.

2.13

3 Całki – zadania

3.1 Całki po obszarach prostokątnych

1. Obliczyć całkę z funkcji f po prostokącie P:

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$, $P = [3,4] \times [1,2]$. **Odp.** $\ln \frac{25}{24}$.

   (b) $f(x,y) = 5x^2y - 2y^3$, $P = [2,5] \times [1,3]$. **Odp.** 660.

   (c) $f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$, $P = [0,1] \times [0,1]$. **Odp.** $\frac{\pi}{12}$.

   (d) $f(x,y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, $P = [0,1] \times [0,1]$. *Wsk.* W jakiej kolejności wygodniej całkować? **Odp.** $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

   (e) $f(x,y) = e^{x+y}$, $P = [0,1] \times [0,1]$. **Odp.**

   (f) $f(x,y) = x \sin(x+y)$, $P = [0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. **Odp.**

   (g) $f(x,y) = x^2 y\, e^{xy}$, $P = [0,1] \times [0,2]$. **Odp.**

2. (a) Znaleźć objętość bryły ograniczonej z dołu płaszczyzną xy, z boków – płaszczyznami $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, a od góry paraboloidą eliptyczną:

   $$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

   (wszystkie parametry a, b, c, d są dodatnie). **Odp.** $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$.

   (b) To samo dla bryły ograniczonej płaszczyzną xy, powierzchnią $x^2 + z^2 = R^2$ dla $z > 0$ i płaszczyznami $y = 0$ i $y = H$. *Wsk.* Bardziej naturalne jest liczenie w ukł. wsp. biegunowych, ale 'nie uprzedzajmy wypadków' i liczmy we wsp. kartezjańskich. **Odp.** (każdy powinien wiedzieć, że) $\frac{1}{2}\pi R^2 H$.

   (c) To samo dla bryły ograniczonej płaszczyznami $z = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ $(b > a > 0,\ d > c > 0)$ i paraboloidą hiperboliczną

   $$z = \frac{xy}{m} \quad (m > 0).$$

   Odp. $|V| = \frac{(d^2-c^2)(b^2-a^2)}{4m}$.

3. * Pokazać, że

   $$\iint_P (xy)^{xy} \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_0^1 x^x \mathsf{d}x.$$

   Uwaga. Funkcja podcałkowa wprawdzie nie jest określona w punkcie $(0,0)$, ale można ją tam dookreślic definiując $f(0,0) = 1$.

4. Pokazać *nierówność Cauchy'ego – Buniakowskiego – Schwarza*: Dla dowolnych ciągłych na $[a,b]$ funkcji f, g zachodzi nierówność

   $$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathsf{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathsf{d}x$$

   Wsk. Scałkować funkcję $(f(x)g(y) - g(x)f(y))^2$ po kwadracie $[a,b] \times [a,b]$.

5. Udowodnić nierówność

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \cdot \int_a^b \frac{\mathsf{d}x}{f(x)} \geqslant (b-a)^2.$$

dla f – ciągłej na $[a,b]$. *Wsk.* Skorzystać z nierówności C-B-Schwarza, będącej treścią poprzedniego zadania.

3.2 Całki po obszarach niekoniecznie prostokątnych

1. Rozstawić granice całkowania, tzn. znaleźć granice całkowania, zapisując całkę po każdym z poniższych obszarów D w postaci całki iterowanej:

   (a) D – trójkąt ograniczony prostymi $x=0$, $y=0$, $x+2y=4$.

   (b) D – obszar dany nierównościami: $x^2+y^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

   (c) D – obszar dany nierównościami: $x+y \leqslant 2$, $x-y \leqslant 2$, $x \geqslant 0$.

   (d) D – obszar dany nierównościami:$y \geqslant x^2$, $y \leqslant 9-x^2$.

   (e) D – obszar dany nierównością: $(x-3)^2+(y-2)^2 \leqslant 9$.

   (f) D – obszar ograniczony krzywymi: $y=x^3$ i $y=\sqrt{x}$.

   (g) D – obszar dany nierównościami: $y^2 \leqslant 8x$, $y \leqslant 2x$, $y+4x-24 \leqslant 0$

   (h) D – obszar ograniczony krzywymi $y^2-x^2=1$ i $x^2+y^2=9$ i zawierający punkt $(0,0)$.

   (i) D – czworokąt o wierzchołkach: $(1,1)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(6,1)$.

2. Zamienić kolejność całkowania w całkach:

   (a) $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathsf{d}y \int\limits_y^{\sqrt{y}} \mathsf{d}x\, f(x,y)$

   (b) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \mathsf{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

   (c) $\displaystyle\int\limits_0^r \mathsf{d}x \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

   (d) $\displaystyle\int\limits_1^2 \mathsf{d}x \int\limits_x^{2x} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

   (e) $\displaystyle\int\limits_0^2 \mathsf{d}x \int\limits_{2x}^{6-x} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

3. Obliczyć całki:

   (a) $\displaystyle\iint\limits_T \sqrt{r^2-\frac{y^2}{x^2}}\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie T jest trójkątem o bokach $y=0$, $y=rx$, $x=1$,

(b) $\iint\limits_T (6-x-y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie T jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$

(c) $\iint\limits_D \frac{x}{y}\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest obszarem zdefiniowanym przez nierówności: $2 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant x^2$.

(d) $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest obszarem ograniczonym przez krzywe: $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$. **Odp.** $I = \frac{9}{4}$. *Wsk.* Która kolejność całkowania będzie wygodniejsza?

(e) $I = \iint\limits_D (x+5y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest trójkątem ograniczonym przez proste: $y = x$, $y = 3x$, $x = 1$. **Odp.** $I = \frac{22}{3}$.

(f) $I = \iint\limits_D \sqrt{2x^2 - y^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest trójkątem ograniczonym przez proste: $y = 0$, $x = 1$, $y = x$. **Odp.** $I = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

3.3 Całki potrójne

1. Obliczyć całki:

(a) $\iiint\limits_C \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest sześcianem $[0,1]^3$;

(b) $\iiint\limits_V z\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie V jest ostrosłupem ograniczonym płaszczyzną $x+y+z = 2$ i płaszczyznami współrzędnych;

4 Zamiana zm. w całce podwójnej

1. Obliczyć całkę z funkcji $f(x,y) = y^2\sqrt{R^2 - x^2}$ po kole o promieniu R i środku w początku układu współrzędnych. **Odp.** $\frac{32}{45}R^5$.

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, walcem $x^2 + y^2 = R^2$ i paraboloidą hiperboliczną $z = xy$; chodzi o bryłę leżącą w pierwszej ćwiartce. **Odp.** $\frac{1}{8}R^4$.

3. Obliczyć objętość *bryły Vivianiego*, tzn. bryły wyciętej walcem $x^2 + y^2 = Rx$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. **Odp.** $\frac{6\pi-8}{9}R^3$.

4. Obliczyć objętość bryły powstałej przez przecięcie pod kątem prostym dwu nieskończenie długich walców o jednakowej średnicy

5. Obliczyć pola powierzchni figur ograniczonych krzywymi o podanych niżej równaniach. Wyliczenia poprzedzić rozpoznaniem ksztełtu krzywych. *Wsk.* Współrzędne biegunowe.

   (a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (lemniskata Bernoulliego). **Odp.** $2a^2$.

   (b) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$. **Odp.** $\frac{5}{8}\pi a^2$.

   (c) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$. **Odp.** $\frac{3}{4}\pi a^2$.

6. Obliczyć pola powierzchni figur ograniczonych krzywymi o podanych niżej równaniach. Wyliczenia poprzedzić rozpoznaniem ksztełtu krzywych. *Wsk.* Uogólnione współrzędne biegunowe: $x = ar\cos\phi$, $y = br\sin\phi$. Policzyć jakobian!

   (a) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$. **Odp.** $\frac{a^2b^2}{2c^2}$.

   (b) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$. **Odp.** $\frac{1}{2}\pi ab(a^2 + b^2)$.

   (c) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}$. **Odp.** $\frac{\pi a^3 b}{2c^2}$.

7. Znaleźć pole ograniczone pętlą krzywej o poniższych równaniach. *Wsk.* Wprowadzić współrzędne r, θ określone przez: $x = r\cos^2\theta$; $y = r\sin^2\theta$.

   (a) $(x + y)^4 = ax^2y$. **Odp.** $\frac{a^2}{210}$.

   (b) $(x + y)^3 = axy$. **Odp.** $\frac{a^2}{60}$.

   (c) $(x + y)^5 = ax^2y^2$. **Odp.** $\frac{a^2}{1260}$.

8. Znaleźć pole powierzchni asteroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Wsk.* Równanie parametryczne asteroidy jest: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $\quad t \in [0, 2\pi]$. Wprowadzić współrzędne r, t określone przez: $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$. Ile wynosi jakobian? **Odp.** $\frac{3}{8}\pi a^2$.

9. Obliczyć całki: $\int\int_C xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, gdzie C jest (krzywoliniowym) 'czworokątem' ograniczonym krzywymi:

   (a) $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$. *Wsk.* Wprowadzić współrzędne ξ, η zdefiniowane przez: $y = \xi x^3$, $y^2 = \eta x$.

(b) $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$. *Wsk.* Wprowadzić współrzędne ξ, η zdefiniowane przez: $y^3 = \xi x^2$, $y^2 = \eta x$.

4.1

10. Obliczyć dla następujących figur płaskich o jednorodnej gęstości masy współrzędne środka masy:

    (a) Ćwiartki elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (znajdującej się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych).

    (b) Wycinka koła o kącie α i promieniu R

11. Obliczyć całkę $\iiint\limits_C z\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest górną połową elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

4.2

12. Obliczyć całkę $\iiint\limits_C z\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest bryłą ograniczoną przez tworzącą stożka $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ i płaszczyznę $z = h$.

13. Obliczyć całkę $\iiint\limits_C (x + y + z)^2\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest wspólną częścią paraboloidy $x^2 + y^2 \leqslant 2az$ i kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$.

14. Znaleźć środek ciężkości bryły ograniczonej powierzchniami paraboloidy $x^2 + y^2 = 2az$ oraz kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.

15. Znaleźć potencjał walca w środku jego podstawy.

16. Obliczyć potencjał grawitacyjny stożka o jednorodnej gęstości masy:

    (a) w wierzchołku

    (b) w środku podstawy.

17. Obliczyć natężenie pola grawitacyjnego stożka o jednorodnej gęstości masy:

    (a) w wierzchołku

    (b) w środku podstawy.

    Wsk. Można wykorzystać poprzednie zadanie.