

1 Funkcje holomorficzne

Są to funkcje jednej zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych, spełniające pewien warunek, o którym będzie dalej.

1.1 Miniaturowa powtórka z liczb zespolonych

Def. *Liczbą zespoloną* nazywamy parę liczb rzeczywistych (a, b) z odpowiednio zdefiniowanymi działaniami dodawania i mnożenia; lub, równoważnie, liczba zespolona to następujący obiekt:

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{oraz } i^2 = -1.$$

Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy jako \mathbb{C} ; geometrycznie jest to iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a więc *płaszczyzna*.

Def. *Liczbę sprzężoną* do $z = a + bi$ definiujemy jako:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Def. *Część rzeczywista* i *urojona* liczb z to:

$$\Re z = a, \quad \Im z = b.$$

Def. *Modułem* liczby z (ozn. $|z|$) jest liczba rzeczywista nieujemna:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Uwaga. Moduł liczby zespolonej spełnia wszystkie własności *normy*.

Def. *Odległość* dwóch liczb zespolonych z_1, z_2 nazywamy

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Dla odległości spełniony jest w szczególności *warunek trójkąta*:

$$\forall_{z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}} : d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$$

1.2 Definicja holomorficzności

Pamiętamy, jak była zdefiniowana *pochodna* funkcji f w przypadku rzeczywistym:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad (1)$$

w zależności od tego, czy dążymy do x z lewa czy z prawa, mówimy o pochodnej lewo- bądź prawostronnej.

W przypadku funkcji *zespolonych* definicja jest bardzo podobna, ale konsekwencje są znacznie głębsze niż w przypadku rzeczywistym.

Def. Niech $f : \mathbb{C} \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie \mathcal{O} jest zbiorem otwartym. Mówimy, że f jest *holomorficzną*, jeśli dla dowolnego $z \in \mathcal{O}$ istnieje granica

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (2)$$

która jest *niezależna od h* , i jeżeli $f'(z)$ jest ciągłą funkcją z .

Uwaga. Definicje różniczkowalności rzeczywistej (3) i zespolonej (2) wyglądają na pierwszy rzut oka tak samo. Definicja różniczkowalności zespolonej jest jednak warunkiem o wiele *mocniejszym*. Warunki (3) (2) mówią że granica ma być taka sama *niezależnie od h* . W przypadku rzeczywistym mamy do zbadania jedynie dwie granice (lewo-i prawostronną), podczas gdy w przypadku zespolonym h może dążyć do zera z *dowolnego* kierunku na płaszczyźnie – i wszystkie te granice muszą być równe.

Przykładem tego, jakim mocnym ograniczeniem jest warunek (2), jest fakt (którego dowód poznamy niedługo), iż *jeśli funkcja holomorficzną jest różniczkowalna jeden raz, to jest też różniczkowalna nieskończenie wiele razy*. Nie ma takiej sytuacji w przypadku rzeczywistym: Funkcja, która jest jeden raz różniczkowalna, nie musi być różniczkowalna więcej razy.

1.3 Podstawowe własności funkcji holomorficzných

Niech $z = x + iy$. Dowolna funkcja $f(z)$ o wartościach zespolonych może być zapisana jako:

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y), \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y) \in \mathbb{R}, \quad Q(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Założmy, że $f(z)$ jest funkcją holomorficzną. Skoro pochodna f ma być *niezależna od kierunku*, to policzmy pochodne w kierunku 'rzeczywistym' i 'urojonym'; muszą one być sobie równe:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (3)$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in i\mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0, k \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \quad (4)$$

Jako się rzekło, pochodne f liczone na dwa sposoby, czyli prawe strony równości (3) i (4), muszą być sobie równe, tak więc mamy:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}, \quad (5)$$

(równość części rzeczywistych), oraz

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}; \quad (6)$$

(równość części urojonych). Równości powyższe to **wzory Cauchy'ego–Riemanna**.

Stwierdziliśmy więc, że części: rzeczywista i urojona funkcji holomorficzej spełniają równania C-R. Okazuje się, że jest również na odwrót:

Tw. Funkcja zespolona $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje P i Q są klasy C^1 i ich pochodne spełniają warunki Cauchy'ego – Riemanna (5) i (6).

Dow.

\implies (tzn. że holomorficzność implikuje spełnienie warunków Cauchy'ego–Riemanna) właśnie powyżej był (wyprowadzenie wzorów C-R przy założeniu holomorficzności funkcji).

\Leftarrow Popatrzmy na funkcję f jako na odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{O} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Założyliśmy, że jest to odwzorowanie klasy C^1 (ponieważ funkcje P, Q są klasy C^1). Słuszny jest więc poniższy wzór:

$$\begin{pmatrix} P(x+h, y+k) \\ Q(x+h, y+k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + r(x, y; h, k), \quad (7)$$

gdzie r jest małą wyższego rzędu, tzn. spełniony jest warunek:

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{r(x, y; h, k)}{\|H\|} = 0 \quad (8)$$

gdzie $H = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$; mamy więc: $\|H\| = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Korzystając z równań Cauchy'ego – Riemanna, mamy:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (9)$$

gdzie oznaczyliśmy $a = \frac{\partial P}{\partial x}$, $b = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Występująca tu macierz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ nazywana jest *macierzą Cauchy'ego–Riemanna*. Można więc (7) przepisać jako

$$\begin{pmatrix} P(x+h, y+k) - P(x, y) \\ Q(x+h, y+k) - Q(x, y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \text{reszta},$$

czyli:

$$\begin{aligned}\Delta P &= ah - bk + r_1 \\ \Delta Q &= bh + ak + r_2\end{aligned}$$

(r_1, r_2 to są reszty) lub, przechodząc z powrotem do języka zespolonego,

$$\Delta f = \Delta P + i\Delta Q = (a + bi)(h + ik) + \text{reszta}$$

i, dzieląc otrzymane wyrażenie przez $h + ik$, dostaniemy

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik} = a + bi + \frac{\text{reszta}}{h + ik},$$

a ostatni wyraz dąży do 0, gdy $h + ik$ dąży do zera (ze względu na (8)). Tak więc

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik} \rightarrow a + bi, \quad \text{gdy } h, k \rightarrow 0,$$

czyli

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{10}$$

CBDO

1.4 Część rzeczywista i urojona funkcji holomorficznej spełniają równanie Laplace'a.

Założmy, że części: rzeczywista $P(x, y)$ i urojona $Q(x, y)$ funkcji holomorficznej f są funkcjami klasy C^2 . (Tak naprawdę to założenie jest niepotrzebne, gdyż jeśli funkcja jest holomorficzna, to ma *wszystkie* pochodne. Pokażemy to niedługo, a na razie zostawimy jako założenie). Wtedy:

Tw. Część rzeczywista P i część urojona Q funkcji holomorficznej spełniają równanie Laplace'a.

Dow.

Zróżniczkujemy równanie (5) po x , a równanie (6) po y i dodajmy stronami. Wykorzystując fakt równości drugich pochodnych mieszanych funkcji Q otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial y^2} = 0 \tag{11}$$

a to jest równanie Laplace'a dla $P(x, y)$.

Teraz zróżniczkujemy (5) po y , a równanie (6) po x i znów dodajmy stronami. Wykorzystując tym razem fakt równości pochodnych mieszanych P otrzymamy, że

$$\frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

a to jest równanie Laplace'a dla $Q(x, y)$.

CBDO

Równania Cauchy'ego–Riemanna mają tę ważną konsekwencję, że *mając daną część rzeczywistą (urojoną) funkcji holomorficzej, można odtworzyć jednoznacznie z dokładnością do stałej jej część urojoną (rzeczywistą)*. Załóżmy, że dana jest część rzeczywista $P(x, y)$ i chcemy odtworzyć część urojoną $Q(x, y)$. Z równań Cauchy'ego–Riemanna mamy: $Q_x = -P_y$, $Q_y = P_x$; mamy w ten sposób dane dwie pochodne cząstkowe funkcji Q , które 'odcałkowujemy' (tzn. liczymy funkcję pierwotną względem każdej zmiennej).

Przykład. Załóżmy, że część rzeczywista funkcji holomorficzej dana jest przez: $P(x, y) =$; znaleźć część urojoną.

Najsamprzód sprawdzamy, czy nie zostaliśmy wpuszczeni w maliny i czy rzeczywiście P jest częścią rzeczywistą jakiejś funkcji holomorficzej. Kryterium na to jest spełnienie przez P równania Laplace'a. Sprawdzamy, że rzeczywiście P spełnia równanie (11).

To teraz przystępujemy do odcałkowywania: Mamy: $Q_x = P_y = \dots$

1.5 Przykłady funkcji holomorficzych

1. Funkcja stała: $f = \text{const}$ jest holomorficzną i $f'(z) \equiv 0$, bo

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 0.$$

2. Odwzorowanie tożsamościowe $f(z) = z$ jest funkcją holomorficzną: $f'(z) = 1$.

3. Suma i iloczyn funkcji holomorficzych jest funkcją holomorficzną. Ponadto:

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z), \quad (13)$$

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z), \quad (14)$$

(dowody identyczne jak w przypadku rzeczywistym).

4. Jeżeli f jest holomorficzną oraz $f'(z) \neq 0$ dla $z \in \mathcal{O}$, to

$$\left(\frac{1}{f(z)} \right)' = -\frac{f'(z)}{f(z)^2} \quad (15)$$

5. Z tego wynika, że *funkcja wymierna*:

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}$$

jest funkcją holomorficzną dla wszystkich z takich, że mianownik jest różny od zera.

6. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, tzn. $P = e^x \cos y$, $Q = e^x \sin y$. Policzmy macierz pochodnych:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Dla tej funkcji, zapisanej jako funkcja z , mamy więc

$$f'(z) = f(z); \quad (16)$$

kojarząc to definicją funkcji wykładniczej dla przypadku rzeczywistego, tzn. funkcją $f(x)$ taką, że $f'(x) = f(x)$, możemy zapisać, że $f(z) = e^z$, tzn.

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

7. Teraz bohater negatywny, tzn. przykład funkcji, która *nie jest* holomorficzną: Niech $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Mamy: $P = x$, $Q = -y$. Macierz pochodnych jest

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Inna funkcja nieholomorficzną: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Mamy: $P = x^2$, $Q = y^2$ i macierz pochodnych jest

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

co *nie ma* tej postaci, co macierz Cauchy'ego–Riemanna.

9. Wiedząc, że funkcja *wykładnicza* $f(z) = e^z$ jest holomorficzną, definiujemy:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

i sinus argumentu zespolonego jest funkcją holomorficzną;

10. Biorąc:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

i również cosinus argumentu zespolonego jest funkcją holomorficzną.

11. Analogicznie, również *funkcje hiperboliczne* argumentu zespolonego:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

są holomorphyjne.

12. *Superpozycja funkcji holomorphyjnych* f, g : Jeżeli:

$$\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{U} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

gdzie f – holomorphyjna na \mathcal{O} – otwartym podzbiorku \mathbb{C} , zaś g – holomorphyjna na \mathcal{U} – otwartym podzbiorku \mathbb{C} , to $g \circ f$ jest holomorphyjna na \mathcal{O} .

Dow. Patrząc na funkcję $g \circ f$ jako na odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ widzimy, że jest to odwzorowanie klasy C^1 i jego macierz Jacobiego jest iloczynem macierzy Jacobiego odwzorowań f i g . Mamy więc:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - ba_1 \\ a_1b + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{pmatrix}; \quad (17)$$

macierz po prawej stronie jest macierzą Cauchy'ego – Riemanna, czyli iloczyn tych macierzy jest odpowiadającą macierz Jacobiego pewnej funkcji holomorphyjnej. Wzór (17) w języku funkcji oznacza, że

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z). \quad (18)$$

CBDO

Dygresja z algebry: Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy liczbami zespolonymi a macierzami C-R:

$$\mathbb{C} \ni z = a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Ta odpowiedniość zachowuje działania arytmetyczne:

$$(a + bi)(a_1 + b_1i) = (aa_1 - bb_1) + i(ab_1 + ba_1),$$

co – jak widać – dokładnie odpowiada wzorowi (17) dla macierzy C-R.

13. **Stw.** Niech $f : \mathbb{C} \supset \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorphyjną; niech $\xi_0 = f(z_0)$, **RYS.** przy czym $f'(z_0) \neq 0$. Wtedy istnieją otoczenia \mathcal{U} punktu z_0 oraz \mathcal{V} punktu ξ_0 takie, że f jest bijekcją \mathcal{U} na \mathcal{V} , a ponadto f^{-1} jest funkcją holomorphyjną na \mathcal{V} .

Dow. Oznaczmy macierz Jacobiego \mathcal{J} dla f w punkcie z_0 jako: $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, gdzie $f'(z_0) = a + bi$. Wyznacznik macierzy Jacobiego jest równy: $\det \mathcal{J} = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0$; niezerowość wyznacznika z założenia. Możemy więc mówić o odwzorowaniu odwrotnym. Macierz odwrotna do \mathcal{J} jest równa:

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{b^2+a^2} \\ -\frac{b}{b^2+a^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix};$$

widać, że jest to macierz C-R, czyli odwzorowanie f^{-1} jest holomorficzne. Postać macierzy \mathcal{J}^{-1} odpowiada wyrażeniu na pochodną funkcji odwrotnej:

$$(f^{-1})'(\xi_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\xi_0))}.$$

CBDO

1.6 Całkowanie w płaszczyźnie zespolonej

Jakiś czas temu rozpatrywaliśmy całki po krzywych w płaszczyźnie. Zetknęliśmy się tam z dwoma całkami: skierowanymi i nieskierowanymi. W przypadku całkowania w płaszczyźnie zespolonej również mamy do czynienia z całkami skierowanymi i nie. Konkretnie¹ definiuje się je następująco.

Niech $\phi(t)$ będzie krzywą w \mathbb{C} : $\mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \rightarrow \phi(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$, $t \in [a, b]$. **RYS.**

Najsampierw jeszcze dla formalności definicja: Niech $f(t)$ będzie funkcją argumentu *rzeczywistego* t , ale o wartościach *zespolonych*: $f(t) = u(t) + iv(t)$. Naówczas całkę z funkcji f w przedziale $[a, b]$ definiujemy jako

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

• *Całka nieskierowana.* Niech F będzie funkcją na \mathbb{C} o wartościach zespolonych: $F \equiv F(z)$. Całkę nieskierowaną z funkcji F po krzywej ϕ oznaczamy jako:

$$\int_{\phi} F ds \equiv \int_{\phi} F |dz|$$

i definiujemy jako:

$$\int_{\gamma} F |dz| = \int_a^b F(\phi(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (19)$$

¹p. anegdotę S. Kisielewskiego...

- • *Całka skierowana.* Interesujące nas całki skierowane to całki postaci:

$$\int_{\phi} F(z) dz = \int_a^b F(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

gdzie l dana jako $\phi(t)$ jest krzywą w \mathbb{C} : $\varphi : \mathbb{R} \supset [a, b] \ni t \rightarrow \mathcal{O} \subset \mathbb{C}$. **RYS.**

- **Przykł.**

- • **Przykł.** Obliczmy całkę:

$$\int_l \frac{dz}{z},$$

gdzie l – okrąg o promieniu R i środku w $(0, 0)$, przebiegany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Parametryzujemy okrąg jako:

$$\varphi(t) = R(\cos t + i \sin t),$$

skąd mamy:

$$\varphi'(t) = R(-\sin t + i \cos t) = i\varphi(t).$$

Tak więc

$$\int_l \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Zapamiętajmy ten wynik – niedługo będzie potrzebny.

Będziemy często gęsto wykorzystywać

Lemat:

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leq \max_{z \in l} |f(z)| \cdot L,$$

gdzie L – długość krzywej l to – jak pamiętamy z rozdziału o całkach krzywoliniowych nieskierowanych:

$$L = \int_a^b |\phi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\phi'_x(t)^2 + \phi'_y(t)^2} dt$$

Dow. Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, \dots, z_n mamy:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|,$$

więc też dla całek:

$$\begin{aligned} \left| \int_l f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(z)| |dz| = \int_a^b |f(z)| |\phi'(t)| dt \\ &\leq \max_{z \in l} |f(z)| \int_a^b |\phi'(t)| dt = \max_{z \in l} |f(z)| \cdot L. \end{aligned}$$

Niech F będzie funkcją holomorficzną. Mamy fundamentalne

Tw. (Cauchy'ego). Niech γ będzie konturem zamkniętym, \mathcal{O} – otwarty podzbiór \mathbb{C} zawierający γ i jej wnętrze (tzn. S), f – funkcja holomorficzna na \mathcal{O} . Wtedy:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (20)$$

Dow. Niech $ga(t) = x(t) + iy(t)$. Oznaczmy przez P oraz Q część rzeczywistą i urojoną $f(z)$ odpowiednio. Wypiszmy:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (P + iQ)(x' + iy') dt = \dots$$

co zapiszmy jako całkę z 1-formy o wartościach zespolonych:

$$\dots = \oint_{\gamma} (P + iQ)(dx + idy) = \dots$$

... wypisujemy część rzeczywistą i urojoną...

$$= \oint_{\gamma} (Pdx - Qdy) + i \oint_{\gamma} (Qdx + Pdy) = \dots$$

... i korzystamy z *tw. Greena*:

$$\dots = \int \int_S (-P_y - Q_x) dx \wedge dy + i \int \int_S (P_x - Q_y) dx \wedge dy;$$

i teraz! korzystając z *warunków Cauchy'ego - Riemanna*: $P_x = Q_y$ oraz $P_y = -Q_x$ widzimy, że zarówno część rzeczywista, jak i urojona powyższej całki znikają. Pokazaliśmy zatem (20).

Przypomnijmy sobie, że niedawno pokazaliśmy równość:

$$\int_l \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

gdzie l – okrąg o promieniu R i środku w $(0, 0)$, przebiegany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Mamy

Wniosek. Niech l – krzywa zamknięta w \mathbb{C} , nie przechodząca przez 0 i jednokrotnie obiegająca 0; obieg jest w kierunku antyzegarowym. Wtedy

$$\int_l \frac{dz}{z} = 2\pi i. \quad (21)$$

Dow. Bowiemy zmodyfikujemy kontur, dorysowując dostatecznie mały okrąg C w środku i łącząc go odcinkiem p z krzywą l **RYS.**; odcinek p przebiegamy

raz w te, a drugi raz we wte. Dostając w ten sposób krzywą l' i mamy: $\int_{l'} \frac{dz}{z} = 0$, bo w obszarze ograniczonym przez krzywą l' funkcja $\frac{1}{z}$ jest holomorficzną. W ten sposób, $\int_l \frac{dz}{z} + \int_C \frac{dz}{z} = 0$, bo całki po odcinku p znoszą się nawzajem. A że okrąg C obiegamy w kierunku zegarowym, to stąd wynika równość (21).

1.7 Ważna funkcja holomorficzną i jej pochodna

Miejmy jakąś funkcję holomorficzną f

Zdefiniujmy funkcję zmiennej zespolonej $\phi(\xi)$ jako

$$\phi(\xi) = \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^k}. \quad (22)$$

gdzie f – funkcja holomorficzną w obszarze \mathcal{O} zawierającym zamkniętą krzywą l ; punkt ξ znajduje się w obszarze ograniczonym przez krzywą l .

Pokażemy

Stw. Określona powyżej funkcja $\phi(\xi)$ jest holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus \xi$ i zachodzi

$$\phi'(\xi) = k \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^{k+1}}. \quad (23)$$

Dow. Trzeba pokazać, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\xi + h) - \phi(\xi)}{h} = k \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^{k+1}}.$$

Oszacujmy różnicę:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\phi(\xi + h) - \phi(\xi)}{h} - k \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^{k+1}} \right| = \\ & = \left| \int_l \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{(z - \xi - h)^k} - \frac{1}{(z - \xi)^k} \right) - k \frac{1}{(z - \xi)^{k+1}} \right] f(z)dz \right| \\ & \leq \max_{z \in l} |f(z)| \cdot \max_{z \in l} |[\dots]| \cdot L \end{aligned}$$

gdzie L – długość krzywej l . Jedyne środkowy człon zależy od h , toteż nim tylko będziemy się zajmować.

Trzeba pokazać, że dąży on (ten człon) do zera przy $h \rightarrow 0$. Sprowadźmy go najsamprzaw do wspólnego mianownika:

$$|[\dots]| = \frac{\left| \frac{1}{h} \left((z - \xi)^{k+1} - (z - \xi - h)^k (z - \xi) \right) - k(z - \xi - h)^k \right|}{|(z - \xi - h)^k (z - \xi)^{k+1}|}$$

tak więc

$$\max |[\dots]| \leq \frac{\max \text{licznika}}{\min \text{mianownika}} \leq \frac{\max \text{licznika}}{(\delta - \epsilon)^{2k+1}},$$

gdzie: δ to odległość od punktu ξ do konturu l , tzn. $\delta = \inf_{z \in l} |\xi - z|$, ϵ zaś jest następującą liczbą:

Dążymy z h do zera, więc dla dostatecznie małych h istnieje takie ϵ , $0 < \epsilon < \delta$, że:

$$|z - \xi| \geq \delta - \epsilon, \quad \text{oraz} \quad |z - \xi - h| \geq \delta - \epsilon.$$

Zatem min mianownika jest większy lub równy $(\delta - \epsilon)^{2k+1}$.

Tak więc oszacowaliśmy mianownik przez coś niezależnego od h . Teraz trzeba pokazać, że max licznika dąży do zera przy $h \rightarrow 0$.

Zauważmy, że licznik jest *wielomianem* w zmiennej h . Współczynniki tego wielomianu dostaniemy z wzoru dwumiennego Newtona, który stosujemy tu następująco:

$$(z - \xi - h)^k = (z - \xi)^k - \binom{k}{1} (z - \xi)^{k-1} h + \binom{k}{2} (z - \xi)^{k-2} h^2 + \dots \pm h^k$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} & \text{licznik} = \\ & \left| \binom{k}{1} (z - \xi)^k - \binom{k}{2} (z - \xi)^{k-1} h + \dots - k(z - \xi)^k - k \binom{k}{1} (z - \xi)^{k-1} h + \dots \right| \\ & = |h| \cdot |\text{wielomian od } (z - \xi, h)| \leq |h| \cdot M, \end{aligned}$$

gdzie M – pewna stała. Ostatnia nierówność bierze się z faktu, że wielomian na zbiorze ograniczonym osiąga swój kres górny – tu oznaczany jako M właśnie.

CBDO

1.8 Wzór całkowy Cauchy'ego

Tw. (Wzór całkowy Cauchy'ego). Niech f – funkcja holomorficzna na zbiorze otwartym \mathcal{O} . Niech S będzie zbiorem otwartym ograniczonym w \mathcal{O} , mającym kawałkami gładki brzeg l . Wtedy dla dowolnego punktu $\xi \in S$ zachodzi

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{z - \xi} \quad (24)$$

Uwaga. Jeśli znamy wartości funkcji f na konturze l , to możemy obliczyć wartość funkcji w *dowolnym* punkcie w obszarze ograniczonym przez ten kontur.

Jest to kolejnym przejawem 'sztywności' funkcji holomorficzných, tzn. że jeśli funkcja jest holomorficzna, to własności tej funkcji są w dużym stopniu zdeterminowane przez ten fakt. W przypadku rzeczywistym nie ma analogonu wzoru Cauchy'ego: Dla funkcji dwóch zmienných rzeczywistých, nawet dowolnie gładkiej, zachowanie na brzegu konturu nie ma nic wspólnego z zachowaniem wewnątrz.

Dow. Mamy:

$$\int_{l'} \frac{f(z)dz}{z - \xi} = 0,$$

gdy ξ nie jest otoczony przez l' . Weźmy jako l' kontur utworzony z l przez dodanie małego okręgu C_z (z tzn. obieganego zegarowo) oraz odcinka p łączącego l oraz C_z . Mamy:

$$0 = \int_{l'} \frac{f(z)dz}{z - \xi} = \int_l \frac{f(z)dz}{z - \xi} + \int_{C_z} \frac{f(z)dz}{z - \xi}$$

czyli

$$\int_l \frac{f(z)dz}{z - \xi} = - \int_{C_z} \frac{f(z)dz}{z - \xi}$$

(C_a – okrąg obiegany antyzegarowo). Policzmy teraz całkę po okręgu C_a , sparametryzujemy więc go:

$$z = \xi + r(\cos t + i \sin t) = \xi + re^{it} \quad \text{mamy : } dz = ire^{it} \quad \text{oraz}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + re^{it})ire^{it}dt}{re^{it}} = i \int_0^{2\pi} f(\xi + re^{it})dt.$$

Bierzemy $\epsilon > 0$. Z ciągłości funkcji f wynika, że dla dostatecznie małego r

$$|f(\xi + re^{it}) - f(\xi)| < \epsilon$$

czyli

$$\int_0^{2\pi} f(\xi + re^{it})dt = \int_0^{2\pi} f(\xi)dt + \int_0^{2\pi} (f(\xi + re^{it}) - f(\xi)) dt.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest równy $2\pi f(\xi)$, drugi zaś jest ograniczony od góry przez $2\pi\epsilon$. Tak więc

$$I = 2\pi i f(\xi) + \text{coś}, \quad \text{gdzie } |\text{coś}| \leq 2\pi\epsilon.$$

Biorąc granicę $\epsilon \rightarrow 0$, mamy

$$\int_l \frac{f(z)dz}{z - \xi} = 2\pi i f(\xi),$$

czyli

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)dz}{z - \xi}$$

co jest wzorem (24).

CBDO

Teraz przypomnijmy sobie definicję funkcji $\phi(\xi)$ daną przez wzór (22), zapisując go żdziebko inaczej (ze wskaźnikiem k) niż uprzednio i z dodatkowym czynnikiem:

$$\phi_k(\xi) = \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^k} \quad (25)$$

Uprzednio też pokazaliśmy, że $\phi_k(\xi)$ spełnia zależność:

$$\phi_k'(\xi) = k\phi_{k+1}(\xi).$$

Biorąc pod uwagę wzór Cauchy'ego, mamy w ten sposób:

$$\phi_1(\xi) = f(\xi) \implies f(\xi) = 1 \cdot \phi_1(\xi);$$

i dalej:

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \phi_1'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^2};$$

$$f''(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \phi_2'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} 2 \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^3}; \dots$$

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} (k-1)! \phi_k'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} (k-1)! k \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^{k+1}} \dots$$

Wniosek: Funkcja holomorphyzna jest różniczkowalna w sensie zespolonym dowolną ilość razy i na k -tą pochodną f mamy wzór

$$f^{(k)}(\xi) = k! \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)dz}{(z - \xi)^{k+1}} \quad (26)$$

1.9 Funkcje całkowite

Def. *Funkcja całkowita* to funkcja holomorphyzna na całej płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} .

Przykł. Wielomiany oraz funkcja wykładnicza są funkcjami całkowitymi.

Tw. (Liouville'a). Każda funkcja całkowita i ograniczona jest stała.

Dow. Niech $f(z)$ będzie ograniczona, tzn. dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ niech zachodzi: $|f(z)| \leq M$. Pochodna funkcji f wynosi:

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{(z - \xi)^2}.$$

Za l weźmy tu okrąg o środku w ξ i promieniu R , obiegany antyżegarowo.

Oszacujmy teraz pochodną f : Dla dowolnego $\xi \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in l} \left| \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} \right| \cdot \text{długość konturu } l \\ &\leq 2\pi R \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R}; \end{aligned}$$

tak więc moduł z pochodnej (w dowolnym punkcie) jest mniejszy od *dowolnie* zadanej liczby dodatniej, a to znaczy, że

$$f'(\xi) = 0$$

w *dowolnym punkcie* ξ płaszczyzny zespolonej.

Z założenia, f jest holomorficzna, tzn. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Zgodnie z warunkiem... znaczy to, że również $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, a to z kolei znaczy, że $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Łącznie znaczy to, że $f(\xi) = \text{const}$.

CBDO

Przykł. Nie jest zaskoczeniem, że wielomiany oraz funkcja wykładnicza w płaszczyźnie zespolonej są nieograniczone (jako że są nieograniczone na osi rzeczywistej). Być może zaskoczeniem dla Czytelnika będzie fakt, że również funkcje trygonometryczne $\sin z$ oraz $\cos z$ są nieograniczone na \mathbb{C} , skoro są ograniczone dla argumentu rzeczywistego. Ale ten fakt (nieograniczoności na \mathbb{C}) stanie się jasny, gdy wziąć wyrażenia na część rzeczywistą i urojoną tych funkcji (wzory ...); ponieważ są tam obecne funkcje hiperboliczne $\sinh(\cdot)$ czy $\cosh(\cdot)$, to jest jasne, że $\sin z$ i $\cos z$ są nieograniczone na \mathbb{C} .

Twierdzenie Liouville'a ma różnorodne zastosowania w analizie zespolonej; na razie pokażemy jeden przykład, aby Czytelnik zobaczył, 'jak to działa'.

Tw. (zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony ma przynajmniej jeden pierwiastek.

Dow. Niech $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Przypuśćmy, że dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, $w(z) \neq 0$. Wobec tego funkcja

$$f(z) = \frac{1}{w(z)}$$

jest całkowita (wiemy, że jeśli $f(z)$ jest holomorficzną oraz nigdzie się nie zeruje, to $\frac{1}{f(z)}$ też jest holomorficzną).

Zapiszmy wzór na $f(z)$ nieco inaczej:

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^n}}$$

Gdy $|z| \rightarrow \infty$, to pierwszy ułamek dąży do 0, a drugi – do $\frac{1}{a_n}$. Wobec tego, funkcja f jest *ograniczona*, a więc – z tw. Liouville’a – jest *stała*. Otrzymaliśmy sprzeczność, tzn. nieprawdą jest, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $w(z) \neq 0$, a to znaczy, że istnieje takie $z_0 \in \mathbb{C}$, że $w(z_0) = 0$. A to jest właśnie treścią zasadniczego twierdzenia algebry.

CBDO

1.10 Wzór Taylora

Niech f – funkcja holomorficzną we wnętrzu $K(z_0, R)$ (koło o środku w punkcie z_0 i promieniu R) oraz ciągła na jego domknięciu $\overline{K(z_0, R)}$ **RYS**. Mamy wtedy, dla dowolnego $\xi \in K(z_0, R)$ wzór Cauchy’ego (24), który dla wygody tu przytaczamy:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{z - \xi} \quad (27)$$

gdzie l jest brzegiem koła $K(z_0, R)$ obieganym antyżegarowo.

Zapiszmy:

$$z - \xi = z - z_0 + z_0 - \xi$$

skąd

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0) \left[1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right]} \quad (28)$$

Zauważmy, że mamy:

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1,$$

tak więc wyrażenie: $1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}$ można rozwinąć w *szereg geometryczny* w potęgach $\frac{\xi - z_0}{z - z_0}$. Dokładniej, zapiszmy *skończoną* wersję rozwinięcia. Weźmy jakąś liczbę naturalną N i mamy:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^N x^k + \frac{x^{N+1}}{1 - x} \quad (29)$$

więc wyrażenie (28) możemy zapisać

$$\frac{1}{z - \xi} = \sum_{k=0}^N \frac{(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} + \frac{1}{z - \xi} \frac{(\xi - z_0)^{N+1}}{(z - z_0)^{N+1}}$$

i wstawiając to do(27), dostaniemy:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^N \int_l \frac{f(z)(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_l f(z) \frac{1}{z - \xi} \frac{(\xi - z_0)^{N+1}}{(z - z_0)^{N+1}} dz$$

co zapiszmy w postaci

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right) (\xi - z_0)^k \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{(z - \xi)(z - z_0)^{N+1}} \right) (\xi - z_0)^{N+1} \end{aligned} \quad (30)$$

Teraz! W k -tym wyrazie powyższej sumy rozpoznajemy k -tą pochodną funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 , możemy więc zapisać:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (\xi - z_0)^k + R_N(z_0, \xi), \quad (31)$$

co jest zespoloną wersją *wzoru Taylora*. We wzorze (31) oznaczyliśmy:

$$R_N(z_0, \xi) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{(z - \xi)(z - z_0)^{N+1}} \right) (\xi - z_0)^{N+1} \quad (32)$$

tak więc R_N jest *resztą* szeregu Taylora, wyrażoną w postaci całki konturowej.

Co można zrobić z resztą? Oszacujmy ją:

$$\begin{aligned} |R_N| &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in l} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{N+1} |z - \xi|} \cdot |\xi - z_0|^{N+1} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{R |\xi - z_0|^{N+1}}{R^{N+1}} \sup_{z \in l} \frac{|f(z)|}{|z - \xi|} \equiv RM \left(\frac{|\xi - z_0|}{R} \right)^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0; \end{aligned}$$

(w ostatniej z powyższych równości nazwaliśmy:

$$M \equiv \sup_{z \in l} \frac{|f(z)|}{|z - \xi|};$$

jest to liczba skończona, gdyż f jest ciągła, więc na krzywej l , będącej zbiorem zwartym, jest ograniczona).

Na powyższe oszacowanie można patrzeć jako na dowód faktu, iż reszta szeregu potęgowego (w potęgach $(z - z_0)$) dąży do 0, gdy $N \rightarrow \infty$. Tak więc szereg ten jest zbieżny. Można więc zapisać wzór (31) jako sumę *szeregu zbieżnego*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k \quad (33)$$

Uwaga. Gdy więc mamy dany punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, oraz funkcję, która jest holomorficzną w kole $K(z_0, R)$, to mamy gwarancję, że wszędzie w kole funkcja ta posiada rozwinięcie w szereg potęgowy (33).

W ten sposób, np. funkcje: e^z , $\sin z$, $\cos z$, które są holomorficzne wszędzie na płaszczyźnie, posiadają rozwinięcie w szereg Taylora w każdym punkcie $z \in \mathbb{C}$.

Można też zadać pytanie w pewnym sensie odwrotne:

Mamy dane $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz zadany pewien ciąg $\{a_k\}$, z którego tworzymy szereg potęgowy

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k. \quad (34)$$

Zadajmy naturalne pytania:

1. Dla jakich $z \in \mathbb{C}$ szereg ten jest zbieżny?
2. Czy jeżeli szereg jest zbieżny, to jego suma jest funkcją holomorficzną?

Okazuje się, że sytuacja jest analogiczna, jak w przypadku szeregu Taylora. Bez dowodu podamy odpowiedzi na powyższe pytania:

1. Szereg potęgowy (34) jest zbieżny wewnątrz koła $K(z_0, R)$, gdzie R dane jest przez któreś z wyrażeń

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{lub} \quad R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad (35)$$

(jeśli obie granice istnieją, to są równe; a pierwsza istnieje, jeśli istnieje druga. Pamiętliwy Czytelnik niechybnie rozpozna w powyższych wzorach zespolony analogon wzorów na promień zbieżności dla szeregów rzeczywistych).

2. Wewnątrz koła zbieżności, suma szeregu (34) jest funkcją holomorficzną.

1.11 O zerach funkcji holomorficznyc, jeśli jest ich ∞ wiele w ograniczonym obszarze

Wnioski. Dla funkcji holomorficznej nie równej tożsamościowo zeru, zera tej funkcji (tzn. rozwiązania równania $f(z) = 0$) są izolowane.

Dokładniej, ma miejsce

Stw. Niech f – holomorficzna na $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, \mathcal{O} – otwarty. Wtedy, jeśli dla pewnego ciągu $\{z_n\}$ zbieżnego do $z_0 \in \mathcal{O}$, $z_n \neq z_0$ dla każdego n , zachodzi: $f(z_n) = 0$, to dla pewnej kuli $K(z_0, R) \subset \mathcal{O}$ zachodzi:

$$f(z) = 0 \quad \text{dla } z \in K(z_0, R).$$

Dow. Skoro $f(z_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, a f – ciągła, to zachodzi: $f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. Rozwińmy f w szereg Taylora wokół z_0 . Z założenia, f nie znika wszędzie, zatem

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^k \not\equiv 0 \quad \text{dla } z \in K(z_0, R).$$

Zatem istnieje k takie, że $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Weźmy takie najmniejsze k i oznaczmy je przez k_0 . Jest to liczba większa lub równa 1 taka, że:

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, k_0 - 1, \text{ oraz}$$

$$f^{(k_0)}(z_0) \neq 0.$$

Zapiszmy więc jeszcze raz rozwinięcie f w szereg Taylora z wykorzystaniem faktu, iż pierwszych k_0 pochodnych się zeruje:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^k \\ &= (z - z_0)^{k_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^{k-k_0} \equiv (z - z_0)^{k_0} g(z) \end{aligned} \quad (36)$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$g(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^{k-k_0}$$

Mamy:

$$0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^{k_0} g(z_n)$$

i, ponieważ z założenia $z_n \neq z_0$, to mamy

$$g(z_n) = 0 \quad \text{dla dowolnego } n.$$

Przechodząc do granicy $n \rightarrow \infty$, mamy:

$$g(z_0) = 0.$$

Ale to znaczy, że

$$g(z_0) = \frac{1}{k_0!} f^{(k_0)}(z_0) = 0.$$

Dostaliśmy sprzeczność, bo na początku pokazaliśmy, że $f^{(k_0)}(z_0) \neq 0$.

CBDO

Def. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ – zbiór otwarty. Mówimy, że \mathcal{O} jest *niespójny*, jeśli

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2,$$

gdzie $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ są otwarte i niepuste, oraz rozłączne: $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. **RYS.**

Def. Zbiór \mathcal{O} jest spójny, jeżeli nie jest niespójny.

Powyższe stwierdzenie można jeszcze tak wypowiedzieć, że jeśli funkcja zeruje się na nieskończonym ograniczonym zbiorze punktów \mathcal{P} , to zeruje się na pewnym otwartym dysku (dwuwymiarowej kuli) zawierającej z_0 (granice podciągu zbieżnego ciągu punktów z \mathcal{P}). Można to stwierdzenie wzmocnić wskazując większy zbiór, na którym f się zeruje. Konkretnie, zeruje się na *całym zbiorze*, na którym jest holomorficzna (a dokładniej na jego składowej spójnej, w której jesteśmy)

Tw. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ – zbiór otwarty i spójny; niech f – funkcja holomorficzna na \mathcal{O} . Niech $f(z_n) = 0$ dla pewnego ciągu $\{z_n\}$, $z_n \in \mathcal{O}$, gdzie $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in \mathcal{O}$. Wtedy $f(z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathcal{O}$.

Idea dowodu. Skoro funkcja ma rozwinięcie Taylora składające się z samych zer, to wszędzie, gdzie jest holomorficzna, jest równa zero. Tak więc $f(z) \equiv 0$ nie tylko w pewnym otoczeniu punktu z_0 , ale też w kole $K(z_0, r)$, rozciągającym się aż do najbliższego punktu, w którym przestaje być holomorficzna. Weźmy teraz jakiś punkt $w \in K(z_0, r)$, taki, że jego pewne otoczenie kołowe 'wystaje' poza koło $K(z_0, r')$. **RYS.** Funkcja f jest równa zero w pewnym otoczeniu punktu w ; skoro tak, to ma rozwinięcie Taylora wokół w składające się z samych zer, a tym samym jest zerowa na całym kole $K(z_0, r')$. Postępując tak dalej, argumentujemy, że $f \equiv 0$ w całym obszarze holomorficzności f , a dokładniej – w jej składowej spójnej. **Rys.**

K.i.d. (koniec idei dowodu)

A tu dla ciekawych pełny dowód, wymagający przypomnienia sobie kilku własności otwartości i domkniętości

Dow. Zdefiniujemy zbiór \mathcal{U} :

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathcal{O} : f^{(k)}(z) = 0 \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Pokażemy, że :

- \mathcal{U} jest otwarty
- $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$ jest otwarty.

Ad • : Jeśli $z^* \in \mathcal{U}$, to szereg Taylora wokół z^* jest złożony z samych zer. Wobec tego, $f(z) = 0$ dla $z \in K(z^*, \rho)$, $\rho > 0$. Wtedy także $f^{(k)}(z) = 0$ dla $z \in K(z^*, \rho)$ i dowolnego $k \geq 0$. Wobec tego $K(z^*, \rho) \subset \mathcal{U}$, czyli \mathcal{U} jest otwarty.

Ad •• : Jeżeli $z^* \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$, to $\exists k \in \mathbb{N} \cup 0 : f^{(k)}(z^*) \neq 0$. Wtedy (ponieważ wszystkie pochodne są funkcjami ciągłymi) $f^{(k)}(z) \neq 0$ również dla $z \in K(z^*, \rho) \subset \mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$, $\rho > 0$. Zatem $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$ jest *otwarty*.

Teraz: Jeśli A, B – zb. otwarte, to $A \setminus B$ nie może być zb. otwartym, chyba że $A \subset B$ (inaczej $A \subset B$ zawiera punkty graniczne). W tym ostatnim przypadku $A \setminus B$ jest zbiorem pustym. Tak więc albo \mathcal{U} , albo $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$ jest zbiorem pustym. Tu zbiór \mathcal{U} nie jest pusty, bo zawiera z_0 . Skoro tak, to pusty jest $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$, zatem $\mathcal{O} = \mathcal{U}$.

CBDO

1.12 Przedłużenie holomorficzne

Niech \mathcal{O}, \mathcal{U} – zbiory otwarte i spójne.

Def. Niech f – holomorficzna na \mathcal{O} , zaś g – holomorficzna na \mathcal{U} . Ponadto, niech $f(z) = g(z)$ dla $z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$. W takiej sytuacji mówimy, że g jest przedłużeniem holomorficznym funkcji f .

Okazuje się, że jeśli przedłużenie holomorficzne istnieje, to może być tylko jedno:

Stw. Przedłużenie holomorficzne jest jednoznaczne.

Dow. Załóżmy, że g_1, g_2 – holomorficzne na \mathcal{U} – dwa przedłużenia holomorficzne funkcji f określonej na \mathcal{O} . Niech

$$g_1(z) = f(z) = g_2(z) \quad \text{dla } z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$$

Wtedy różnica $g_1(z) - g_2(z) = 0$ dla $z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$. Na mocy tw. udowodnionego dopiero co, oznacza to, że również na całym \mathcal{U} zachodzi $g_1(z) - g_2(z) = 0$, tzn. $g_1(z) = g_2(z)$ na całym \mathcal{U} .

CBDO

RYS. – przedłużanie funkcji holomorficzej

Ilustracja – z książki Byrona i Fullera: Rekonstrukcja dinozaura z jego dowolnie małej kosteczki

Uwaga. Może się zdarzyć niespodzianka: Po powrocie do punktu pierwotnego, *funkcja przedłużona może nie być równa funkcji sprzed przedłużenia!*

RYS.

Prowadzi to do funkcji *wieloznacznych*, takich jak pierwiastek albo logarytm – będzie o tym odrobinę w przyszłym roku.

1.13 Szereg Laurenta

Widzieliśmy rozwinięcia funkcji w szereg Taylora. Do dokonania takiego rozwinięcia konieczne jest, abyśmy byli w obszarze, w którym funkcja jest holomorficzną. Dokładniej, punkt z_0 , względem którego rozwijamy, jest środkiem koła, i wewnątrz tego koła funkcja musi być holomorficzną. **RYS.**

Okazuje się, że można uwolnić się od założenia, iż funkcja ma być holomorficzną w kole i wtedy mamy do czynienia z ogólniejszym typem rozwinięcia, zawierającym *ujemne* potęgi $z - z_0$. Rozwinięcie takie nazywamy *rozwinięciem Laurenta*. Dokładniej, zachodzi:

Tw. Jeżeli $f(z)$ jest holomorficzną w pierścieniu między okręgami współśrodkowymi $C \equiv C(z_0, r)$ oraz $C' \equiv C(z_0, r')$ (tu $r > r'$; **RYS.**) oraz ciągła na okręgach, to w każdym punkcie pierścienia $f(z)$ ma rozwinięcie postaci

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_1}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (37)$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} f(\xi) (\xi - z_0)^{n-1} d\xi \quad (38)$$

Uwaga. W powyższym wyrażeniu na a_n rozpoznajemy współczynnik rozwinięcia w szereg Taylora (porównajmy z wzorem (30)); tak więc rozwinięcie Laurenta można uważać za uogólnienie tego ostatniego.

Dow. Weźmy jakiś punkt należący do pierścienia; oznaczmy go $z_0 + h$, gdzie $r' < |h| < r$. Z założenia, w pierścieniu funkcja $f(z)$ jest holomorficzną, więc możemy napisać:

$$f(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz \quad (39)$$

gdzie kontur Γ składa się ze współśrodkowych okręgów C, C' wraz z łącznikiem p . Zewnętrzny okrąg C jest obiegany antyzegarowo, zaś wewnętrzny C' zegarowo, stąd znak minus przy całce $\int_{C'}$.

Przytoczmy tu teraz jeszcze raz wzór (29) na skończony urywek szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^N x^k + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

Napiszmy teraz rozwinięcie $\frac{1}{z-z_0-h}$ w dwóch wersjach, z których jedna jest zaadoptowana do pierwszej całki po prawej stronie równości (39), a druga do drugiej:

- Ułamek $\frac{1}{z-z_0-h}$ w pierwszej całce zapiszmy w postaci:

$$\frac{1}{z-z_0-h} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{h}{z-z_0}} = \dots$$

... tu mamy: $\left|\frac{h}{z-z_0}\right| = \left|\frac{h}{r}\right| < 1$ i rozwijamy drugi czynnik w potęgach $\frac{h}{z-z_0}$
...

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{z-z_0} \left[1 + \frac{h}{z-z_0} + \frac{h^2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{h^N}{(z-z_0)^N} + \frac{h^{N+1}}{1-\frac{h}{z-z_0}} \right] \\ &= \frac{1}{z-z_0} + \frac{h}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{h^N}{(z-z_0)^{N+1}} + \frac{h^{N+1}}{(z-z_0-h)(z-z_0)^{N+1}} \end{aligned} \quad (40)$$

- Ułamek $\frac{1}{z-z_0-h}$ w pierwszej całce zapiszmy w postaci:

$$\frac{1}{z-z_0-h} = \frac{1}{h} \frac{1}{\frac{z-z_0}{h}-1} = -\frac{1}{h} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{h}} = \dots$$

... tu z kolei mamy: $\left|\frac{z-z_0}{h}\right| = \left|\frac{r'}{h}\right| < 1$ i rozwijamy w potęgach $\frac{z-z_0}{h}$...

$$\begin{aligned} \dots &= -\frac{1}{h} \left[1 + \frac{z-z_0}{h} + \frac{(z-z_0)^2}{h^2} + \dots + \frac{(z-z_0)^N}{h^N} + \frac{\frac{(z-z_0)^{N+1}}{h^{N+1}}}{1-\frac{z-z_0}{h}} \right] \\ &= -\left[\frac{1}{h} + \frac{z-z_0}{h^2} + \frac{(z-z_0)^2}{h^3} + \dots + \frac{(z-z_0)^N}{h^{N+1}} + \frac{(z-z_0)^{N+1}}{h^{N+1}(z-z_0-h)} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Wstawiając powyższe rozwinięcia do odpowiednio pierwszej i drugiej całki w (39), dostaniemy

$$\begin{aligned} f(z_0+h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dz f(z) \left[\frac{1}{z-z_0} + \frac{h}{(z-z_0)^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^N}{(z-z_0)^{N+1}} + \frac{h^{N+1}}{(z-z_0-h)(z-z_0)^{N+1}} \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} dz f(z) \left[\frac{1}{h} + \frac{z-z_0}{h^2} + \frac{(z-z_0)^2}{h^3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(z-z_0)^N}{h^{N+1}} + \frac{(z-z_0)^{N+1}}{h^{N+1}(z-z_0-h)} \right] \end{aligned}$$

$$= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_N h^N + R_+^{(N)} + \frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \dots + \frac{b_N}{h^N} + R_-^{(N)} \quad (42)$$

gdzie:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} dz f(z) (z - z_0)^{n-1}$$

oraz

$$R_+^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{h^{N+1} f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^{N+1}}, \quad R_-^{(N)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} dz \frac{(z - z_0)^{N+1} f(z)}{(z - z_0 - h)(h)^{N+1}} \quad (43)$$

Oszacowanie reszt $R_+^{(N)}$, $R_-^{(N)}$.

Jak pamiętamy, mieliśmy oszacowanie:

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq Ml, \quad \text{gdzie } M = \sup_{z \in \gamma} |f(z)|, \quad l - \text{długość konturu } \gamma.$$

W naszym przypadku mamy:

$$|R_+^{(N)}| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{|h|^{N+1}}{r^{N+1}} 2\pi r, \quad \text{gdzie } M = \sup_{z \in C} \frac{|f(z)|}{|z - z_0 - h|}.$$

Widać, że dla $\frac{|h|}{|r|} < 1$, zachodzi: $\lim_{N \rightarrow \infty} R_+^{(N)} = 0$.

Analogicznie szacując, mamy

$$|R_-^{(N)}| \leq \frac{1}{2\pi} M' \frac{r^{N+1}}{|h|^{N+1}} 2\pi r, \quad \text{gdzie } M' = \sup_{z \in C'} \frac{|f(z)|}{|z - z_0 - h|}.$$

skąd wynika, że dla $\frac{r}{h} < 1$, zachodzi: $\lim_{N \rightarrow \infty} R_-^{(N)} = 0$.

CBDO

Przypadek szczególny: Gdy f jest holomorficzną w $K(z_0, r)$ z wyjątkiem środka, to rozwinięcie Laurenta jest poprawne dla całego koła $K(z_0, r)$ z wyjątkiem środka.

1.14 Osobliwości funkcji jednowartościowych

Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w obszarze S poza pojedynczym punktem a wewnątrz S . Załóżmy, że istnieje taka funkcja holomorficzną $\phi(z)$, która:

1. jest holomorficzną na S ,
2. jeżeli $z \neq a$, to $f(z) = \phi(z) + \frac{b_1}{z-a} + \dots + \frac{b_n}{(z-a)^n}$.

Def. Jeżeli istnieje powyższe przedstawienie funkcji $f(z)$, to mówimy, że funkcja $f(z)$ ma w punkcie $z = a$ biegun rzędu n .

Def. Jeżeli $n = 1$, to mówimy, że biegun jest *prosty*.

Def. Każdą osobliwość, która nie jest biegunem, nazywamy *osobliwością istotną*.

Def. Mówimy, że osobliwość w punkcie a jest *izolowana*, jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że $K(a, \delta)$ zawiera tylko osobliwość w punkcie a .

Dla osobliwości istotnej izolowanej rozwinięcie Laurenta jest szeregiem nieskończonym w ujemnych potęgach $(z - a)$.

Wzmianki o: Punktach pozornie osobliwych; oraz Punktach skupienia biegunów; i punkcie w nieskończoności.

Przykłady.

1. $f(z) = \frac{1}{z}$: Biegun prosty w $z = 0$.
2. $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$: Biegun rzędu k w $z = a$.
3. $f(z) = \frac{e^z}{z}$: biegun prosty w $z = 0$.
4. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$: osobliwość istotna w $z = 0$. Bo: Rozwinięcie w szereg Laurenta ma postać:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots$$

5. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$: Biegunki proste w $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Bo: Wiemy, że dla $z \in \mathbb{R}$, funkcja $\sin z$ ma zera pojedyncze w $z = k\pi$. Przekonamy się niedługo, że w dziedzinie zespolonej nie ma innych zer. Tak więc jedynymi biegunkami funkcji $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ są punkty $z = k\pi$.

1.15 Residuum funkcji i twierdzenie o residuach.

Niech funkcja $f(z)$ posiada biegun krotności m w punkcie $z = a$.

Def. *Residuum* funkcji $f(z)$ w punkcie $z = a$ nazywamy współczynnik a_{-1} rozwinięcia w szereg Laurenta wokół punktu $z = a$:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \varphi(z),$$

gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją holomorficzną.

Ozn. Residuum funkcji $f(z)$ w punkcie $z = a$ oznaczamy $\text{Res}(f, a)$.

Pojęcie residuum ma duże znaczenie, bo – jak zaraz zobaczymy – gdy liczymy całkę z funkcji po obszarze, zawierającym bieguny funkcji, to jedyny wkład do całki bierze się z residuów funkcji.

Ale najspierw zobaczymy, ile wynosi całka po konturze otaczającym *jeden* biegun.

Weźmy więc funkcję tę co powyżej i weźmy $C(a, \epsilon)$, gdzie $\epsilon > 0$ jest takie, że wewnątrz $C(a, \epsilon)$ jedyną osobliwością jest osobliwość w $z = a$.

Obliczmy:

$$\int_{C(a, \epsilon)} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{C(a, \epsilon)} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} dz + \int_{C(a, \epsilon)} \varphi(z) dz;$$

ta ostatnia całka jest równa zeru (jako całka z funkcji holomorficznej). Policzmy teraz każdą z całek w sumie po prawej stronie powyższej równości, tzn. $\int_{C(a, \epsilon)} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} dz$ dla $k > 0$. Parametryzując standardowo okrąg $C(a, \epsilon)$ jako: $z = a + \epsilon e^{i\phi}$, co daje: $dz = i\epsilon e^{i\phi} d\phi$, i dalej mamy:

$$\int_{C(a, \epsilon)} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} dz = \int_0^{2\pi} \epsilon^{-k} e^{-ki\phi} i\epsilon e^{i\phi} d\phi = i\epsilon^{1-k} \int_0^{2\pi} \epsilon^{-k} e^{i\phi(1-k)} d\phi = \begin{cases} 0 & \text{dla } k > 1 \\ 2\pi i & \text{dla } k = 1 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$\int_{C(a, \epsilon)} f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \equiv 2\pi i \text{Res}(f, a).$$

Rozpatrzmy teraz kontur funkcję $f(z)$, zawierającą w pewnym obszarze S otoczonym konturem γ punkty osobliwe, będące biegunami; niech ich położenia będą a^1, a^2, \dots, a^n **RYS**. Obliczmy znów całkę $\int f(z) dz$. W tym celu zauważmy, że całka ta jest równa całce po konturze $\tilde{\gamma}$, gdzie $\tilde{\gamma}$ powstał z γ przez dorysowanie okręgów $C(a^k, \epsilon)$ razem z łącznikami, łączącymi je z konturem γ . **RYS**.. Tu $\epsilon > 0$ jest na tyle małe, że wewnątrz każdego okręgu $C(a^k, \epsilon)$ jedynym punktem osobliwym jest biegun w punkcie a^k . Posługując się argumentacją występującą już przynajmniej raz, mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{C(a^1, \epsilon)} f(z) dz + \int_{C(a^2, \epsilon)} f(z) dz + \dots + \int_{C(a^n, \epsilon)} f(z) dz \\ &= 2\pi i (a_{-1}^1 + a_{-1}^2 + \dots + a_{-1}^n). \end{aligned}$$

Powyższą obserwację możemy zebrać w twierdzeniu, znamym jako

Tw. (o residuach). Niech $f(z)$ – funkcja holomorficzna wewnątrz konturu γ , z wyjątkiem punktów a^1, a^2, \dots, a^n , w których są bieguny skończonego

rzędu, oraz ciągła na γ . Wtedy

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a^k). \quad (44)$$

1.15.1 Użyteczne wzorki na liczenie residuów

1. **Stw.** Niech $f(z)$ ma biegun prosty w $z = a$. Wtedy

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a). \quad (45)$$

Dow. Mamy bowiem rozwinięcie funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - a} + \phi(z),$$

gdzie $\phi(z)$ jest holomorficzną, więc $\phi(z)$ istnieje w punkcie a i jego otoczeniu. Stąd

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a) = \lim_{z \rightarrow a} a_{-1} + (z - a)\phi(z) = a_{-1}.$$

CBDO

2. **Stw.** Niech $f(z)$ ma biegun rzędu n w $z = a$. Wtedy

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z - a)^n). \quad (46)$$

Dow. Rozwinięcie $f(z)$ w szereg Laurenta ma postać:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \phi(z),$$

gdzie $\phi(z)$ – holomorficzna. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z - a)^n) &= \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a_{-n} + a_{-n+1}(z - a) + \dots + a_{-1}(z - a)^{n-1} + \phi(z)] \\ &= (n-1)!a_{-1} + (\phi(z)(z - a)^n)^{(n-1)} \\ &= (n-1)!a_{-1} + (z - a) \cdot \text{pewna funkcja holomorficzna.} \end{aligned}$$

Biorąc granicę $\lim_{z \rightarrow a}$ powyższego wyrażenia, otrzymujemy (46).

CBDO

1.15.2 Przykłady

1. $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$

2. $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$

3. $f(z) = \frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$

1.16 Zastosowanie rachunku residuów do liczenia całek rzeczywistych: funkcje jednoznaczne

Za pomocą rachunku residuów można liczyć wiele typów całek rzeczywistych. Należą do nich zarówno całki 'policzalne' przy użyciu technik i sztuczek, które poznaliśmy już przy okazji szukania funkcji pierwotnych, takich jak całkowanie przez podstawienie i przez części; metoda residuów pozwala zazwyczaj takie całki policzyć znacznie szybciej. Są też jednak całki 'niepoliczalne', nie dające się znaleźć standardowymi metodami liczenia funkcji pierwotnych.

1.16.1 Całki postaci $\int_0^{2\pi} R(\cos \phi, \sin \phi) d\phi$, gdzie $R(\cdot, \cdot)$ jest funkcją wymierną

Mamy bowiem:

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \quad \sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$

Wprowadźmy teraz zamianę zmiennych $\phi \leftrightarrow z$:

$$z = e^{i\phi} \quad \text{tzn.} \quad z \in C(0, 1)$$

a całkowanie po ϕ w przedziale $[0, 2\phi]$ odpowiada całkowaniu po z w płaszczyźnie zespolonej po okręgu $C(0, 1)$. Mamy dalej:

$$dz = ie^{i\phi} d\phi \implies d\phi = \frac{1}{iz} dz, \quad \cos \phi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \phi = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

i można wyrazić całkę po ϕ przez całkę po z :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \phi, \sin \phi) d\phi = \int_{C(0,1)} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz$$

a ta ostatnia całka jest równa $2\pi i$ razy suma residuów funkcji podcałkowej wewnątrz okręgu $C(0, 1)$.

Ograniczeniami tej metody są warunki jej stosowalności: Funkcja podcałkowa nie może mieć osłobiwości na okręgu $C(0, 1)$ oraz całka po ϕ musi być w przedziale $[0, 2\pi]$.

Przykład. 1 Obliczmy, dla $0 < p < 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p \cos \phi + p^2} d\phi & (47) \\ &= \int_{C(0,1)} \frac{1}{1 - pz - \frac{p}{z} + p^2} \frac{1}{iz} dz \\ &= \int_{C(0,1)} \frac{i}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p} dz = \int_{C(0,1)} \frac{i}{p(z - p)(z - \frac{1}{p})} dz \equiv \int_{C(0,1)} f(z) dz; \end{aligned}$$

widac, że funkcja podcałkowa ma bieguny w $z_1 = p$ oraz $z_2 = \frac{1}{p}$, z czego wewnątrz okręgu $C(0, 1)$ leży tylko $z_1 = p$. Residuum funkcji podcałkowej w tym punkcie wynosi:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{i}{p(z - p)(z - \frac{1}{p})} = \frac{i}{p(p - \frac{1}{p})}$$

oraz

$$I_1 = 2\pi i \text{Res}(f, z_1) = \frac{2\pi}{1 - p^2}.$$

Uwaga. Całkę (47) można też obliczyć za pomocą podstawienia uniwersalnego $t = \text{tg}(\frac{x}{2})$, ale jest to znacznie bardziej pracochłonne.

1.16.2 Całki postaci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x) dx \quad (48)$$

Powyższą całkę będziemy obliczać przez całkowanie odpowiednio dobranej funkcji $Q(z)$ po konturze, zawierającym oś rzeczywistą. Funkcja $Q(z)$ w związku z tym musi spełniać: $Q(x) = q(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. (Funkcja $Q(z)$ może być równa $q(z)$, tzn. rozszerzenia zespolonego funkcji $q(x)$, ale nie musi – zależy to od problemu). Odnośnie funkcji $Q(z)$ czynimy następujące założenia:

1. $Q(z)$ jest holomorficzna w górnej półpłaszczyźnie zespolonej, z wyjątkiem skończonej ilości biegunów w punktach z_1, z_2, \dots, z_m .
2. $Q(z)$ nie ma biegunów na osi rzeczywistej.

3. Dla $|z| \rightarrow \infty$, $|zQ(z)| \rightarrow 0$ niemal jednostajnie dla $0 < \arg z < \pi$.
(Uwaga – przypomnienie: Mówimy, że $f(x)$ dąży do zera niemal jednostajnie na przedziale $]a, b[$, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$, $f(x)$ dąży do zera jednostajnie na każdym przedziale $[a + \epsilon, b - \epsilon]$.) Zakładamy też, że zachodzi: $|zQ(z)| < C$ dla $0 \leq \arg z \leq \pi$.
4. Dla $z = x \in \mathbb{R}$, zachodzi: $xQ(x) \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow \pm\infty$ oraz całki:

$$\int_{-\infty}^0 Q(x)dx \text{ i } \int_0^{\infty} Q(x)dx$$
są zbieżne.

Jeśli powyższe założenia są spełnione, to mamy

Tw. Całka (48) jest równa $2\pi i \times$ (suma residuów w górnej półpłaszczyźnie).

Dow. Obliczymy całkę po konturze Γ , złożonym z odcinka $\Gamma_1 = [-R, R]$ oraz półokręgu $\Gamma_2 = Re^{i\phi}$, $0 \leq \phi \leq \pi$. **RYS.** Biorąc dostatecznie duże R , kontur Γ zawiera w swoim wnętrzu wszystkie bieguny funkcji $Q(z)$, zatem

$$\int_{\Gamma} Q(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(Q, z_k).$$

Z drugiej strony, mamy: $\int_{\Gamma} Q(z)dz = \int_{\Gamma_1} Q(z)dz + \int_{\Gamma_2} Q(z)dz$. Gdy $R \rightarrow \infty$, to pierwsza całka dąży do $\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx$ z założeń dotyczących zachowania $Q(z)$ na osi rzeczywistej. Pozostaje więc oszacować całkę $\int_{\Gamma_2} Q(z)dz$, a dokładniej, pokazać, że $\int_{\Gamma_2} Q(z)dz \rightarrow 0$ dla $R \rightarrow \infty$.

Podzielmy półokrąg Γ_2 na trzy części: $\Gamma_{2,+}$, gdzie $0 \leq \phi \leq \delta$; $\Gamma_{2,-}$, gdzie $\pi - \delta \leq \phi \leq \pi$; oraz $\Gamma_{2,i}$, gdzie $\delta \leq \phi \leq \pi - \delta$. Tu $\delta > 0$ jest liczbą, którą można wybrać dowolnie małą.

Weźmy teraz jakieś δ , które może być dowolnie małe. Wtedy $|\int_{\Gamma_{2,i}} Q(z)dz|$ można również uczynić dowolnie małym, powiedzmy równym δ (przez dobór dostatecznie dużego R). Całki zaś $|\int_{\Gamma_{2,+}} Q(z)dz|$ i $|\int_{\Gamma_{2,-}} Q(z)dz|$ szacują się z góry przez $C\delta$. Tak więc $|\int_{\Gamma_2} Q(z)dz| \leq (2C + 1)\delta$, i ponieważ δ możemy uczynić tak małym, jak chcemy, to ostatecznie $\int_{\Gamma_2} Q(z)dz \rightarrow 0$.

CBDO

Przykł. 2. Jednym z zastosowań powyższego twierdzenia jest liczenie całek z funkcji wymiernych. Dla ilustracji weźmy całkę:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx.$$

Przy liczeniu takich całek, całkujemy po brzegu półkola funkcję podcałkową, tyle że od argumentu zespolonego.

Bieguny $q(z)$ są tam, gdzie są zera mianownika; a że mamy

$$z^4 + 10z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)(z - i)(z + i)$$

to w górnej półpłaszczyźnie znajdują się dwa bieguny w punktach $z_1 = i$, $z_2 = 3i$. Policzmy residua w tych punktach:

$$\operatorname{Res}(q, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i)} (z - i)$$

$$= \frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + i)} \Big|_{z=i} = \frac{1 - i}{16i}$$

$$\operatorname{Res}(q, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i)} (z - 3i)$$

$$= \frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - i)(z + i)} \Big|_{z=3i} = \frac{7 + 3i}{48i}$$

i, zgodnie z tezą powyższego Twierdzenia, mamy

$$I_2 = 2\pi i (\operatorname{Res}(q, i) + \operatorname{Res}(q, 3i)) = \frac{5\pi}{12}.$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić założenia Twierdzenia. 1. sprawdziliśmy, 2. jest oczywiste (bo mianownik jest dodatni dla $x \in \mathbb{R}$), 4. też, zostaje jeszcze sprawdzić 3. Na okręgu $Re^{i\phi}$ mamy:

$$|zq(z)| = |Re^{i\phi}q(Re^{i\phi})| = \left| \frac{(R^2 e^{2i\phi} - Re^{i\phi} + 2)Re^{i\phi}}{R^4 e^{4i\phi} + 10R^2 e^{2i\phi} + 9} \right| \leq R \frac{R^2 + R + 2}{R^4 - 10R^2 + 9} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1 + \frac{1}{R}}{1 - \frac{10}{R^2}}$$

(nierówność powyżej jest z sensem dla dostatecznie dużych R – wystarczy wziąć np. $R > 100$). Widać, że gdy $R \rightarrow \infty$, to $zq(z) \rightarrow 0$ dla *dowolnego* $\phi \in [0, \pi]$, tak więc jest spełnione żądane oszacowanie jednostajne.

Przykł. 3. Kolejnym zastosowaniem powyższego twierdzenia jest liczenie całek z funkcji postaci: (wielomian trygonometryczny) \times (funkcja wymierna). (Całki tego typu często występują przy liczeniu *transformat Fouriera*). Dla ilustracji obliczmy całkę:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{(x^2 + a^2)^2} dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) dx.$$

gdzie $m, a > 0$.

Tu po półkolu Γ będziemy całkować funkcję $Q(z) = \frac{e^{miz}}{(z^2 + a^2)^2}$. Widać, że gdy $z \in Rdb$, to $\operatorname{Re} Q(z) = q(x)$.

Funkcja $Q(z)$ ma w górnej półpłaszczyźnie jeden biegun drugiego rzędu w punkcie $z^* = ai$. Tak więc:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} Q(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(Q, ai) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{imz}}{(z+ai)^2(z-ai)^2} (z-ai)^2 \right] \\ &= 2\pi i \left[im \frac{e^{imz}}{(z+ai)^2} - 2 \frac{e^{imz}}{(z+ai)^3} \right] \Big|_{z=ai} = \frac{\pi(ma+1)}{2a^3} e^{-ma}. \end{aligned}$$

(do liczenia residuum w biegunie drugiego rzędu wykorzystaliśmy wzór (46)).

Pozostaje jeszcze sprawdzić, czy spełnione są założenia Tw. z którego korzystaliśmy. 1. sprawdziliśmy, 2. jest oczywiste (bo mianownik jest dodatni dla $x \in \mathbb{R}$), 4. też, zostaje jeszcze sprawdzić 3. Na okręgu $Re^{i\phi}$ mamy:

$$\begin{aligned} |zQ(z)| &= |Re^{i\phi}Q(Re^{i\phi})| = \left| \frac{Re^{i\phi}}{(R^2e^{2i\phi} + a^2)^2} e^{iRe^{i\phi}} \right| = \left| \frac{Re^{i\phi} e^{iR \cos \phi} e^{-R \sin \phi}}{(R^2e^{2i\phi} + a^2)^2} \right| \\ &\leq \frac{Re^{-R \sin \phi}}{(R^2 - a^2)^2} \leq \frac{R}{(R^2 - a^2)^2}. \end{aligned}$$

(pierwsza nierówność powyżej zachodzi dla $R > a$). Widać, że gdy $R \rightarrow \infty$, to $zQ(z) \rightarrow 0$ dla dowolnego $\phi \in [0, \pi]$, tak więc jest spełnione żądane oszacowanie jednostajne.

1.17 Funkcje wieloznaczne i powierzchnie Riemanna

Powyższe zjawisko (że po dokonaniu obiegu po krzywej zamkniętej powracamy do tego samego punktu, ale funkcja tam ma inną wartość) może zdarzyć się dla *funkcji wieloznacznej*.

1.17.1 \sqrt{z} – funkcja dwuznaczna

Zobaczmy to bardziej szczegółowo dla funkcji $f(z) = \sqrt{z}$.

Zapisując z w postaci wykładniczej, mamy: $z = re^{i\phi}$, skąd $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\phi/2+k\pi}$ ($k = 0, 1$). Weźmy $k = 0$; biorąc tę wartość pierwiastka, połóżmy teraz $z = 1$, tzn. $r = 1, \phi = 0$. Mamy: $\sqrt{1} = 1$. Teraz obiegijmy punkt 0 po okręgu $C(0, 1)$. **RYS.** Gdy obiegniemy okrąg, zobaczymy, że wartość funkcji $\sqrt{1} = 1 \cdot e^{i\pi} = -1$, czyli w sposób ciągły przeszliśmy do *drugiej możliwej* wartości pierwiastka. Widzimy więc, że *nie wróciliśmy* do tej samej wartości funkcji, mimo że poruszaliśmy się po krzywej ciągłej. Obiegijmy teraz znów po okręgu jednostkowym punkt $0 \in \mathbb{C}$; po tym obiegu, powrócimy znów do wartości funkcji na samym początku, tzn.1.

Widzimy więc, że mamy tu do czynienia z funkcją *dwuznaczną*, tzn. każdej (prócz 0) wartości argumentu odpowiadają *dwie* wartości funkcji. (Sam ten fakt nie powinien być niespodzianką, bo wiemy, że dla dowolnej liczby zespolonej mamy dwie wartości pierwiastka kwadratowego).

Gdybyśmy chcieli zilustrować tę sytuację, to na pierwszy rzut oka zbiorem wartości funkcji powinny być *dwie* płaszczyzny zespolone $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$.

Ten obraz nie oddaje jednak wszystkich aspektów sytuacji. Gdy bowiem weźmiemy punkt na \mathbb{C}_1 i obiegamy punkt 0 po okręgu jednostkowym, to po jednym obiegu 'przeskakujemy' na drugą płaszczyznę \mathbb{C}_2 . A po drugim obiegu z powrotem 'przeskakujemy' na \mathbb{C}_1 . Możemy to zilustrować 'sklejając' obie płaszczyzny wzdłuż rozcięcia branego np. wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej **RYS**. (Rozcięcie wzdłuż takiej akurat półprostej jest jedynie ilustracją; mogłoby to być rozcięcie wzdłuż dowolnej innej półprostej zaczynającej się w zerze. Istotny jest tu jedynie fakt przeskoku na inną płaszczyznę po dokonaniu pełnego obiegu wokół punktu 0).

A co by było, gdybyśmy wystartowali z punktu $z_0 = 1$ i wrócili do niego, nie obiegając zera? Wtedy powrócilibyśmy znów do wartości 1 – nie byłoby przeskoku na drugą płaszczyznę wartości pierwiastka.

1.17.2 $\sqrt[3]{z}$ – funkcja trójznaczna

Rozważmy teraz $f(z) = \sqrt[3]{z}$.

Postąpmy teraz tak jak poprzednio: Zapisując z w postaci wykładniczej, mamy: $z = re^{i\phi}$, skąd $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}e^{i\phi/3 + \frac{2ki\pi}{3}}$. Weźmy znów $k = 0$. Biorąc tę wartość pierwiastka, połączmy teraz $z = 1$, tzn. $r = 1, \phi = 0$. Mamy: $\sqrt[3]{1} = 1$. Teraz obiegijmy punkt 0 po okręgu $C(0, 1)$. **RYS**. Gdy obiegniemy okrąg, zobaczymy, że wartość funkcji $\sqrt[3]{1} = 1 \cdot e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Obiegijmy 0 jeszcze raz; dostaniemy wartość $\sqrt[3]{1} = 1 \cdot e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Po trzecim obiegu wrócimy do wartości początkowej $\sqrt[3]{1} = 1$.

Sytuację tę ilustrujemy biorąc *trzy* egzemplarze płaszczyzny zespolonej, porozcinane wzdłuż półprostej (np. rzeczywistej dodatniej) i sklejone w odpowiedni sposób górne rozcięcie \mathbb{C}_1 z dolnym rozcięciem \mathbb{C}_2 ; górne rozcięcie \mathbb{C}_2 z dolnym rozcięciem \mathbb{C}_3 ; i wreszcie górne rozcięcie \mathbb{C}_3 z dolnym rozcięciem \mathbb{C}_1 .

1.17.3 $\log z$ – funkcja o nieskończonej ilości płatów

Przyjmijmy definicję logarytmu jako funkcji odwrotnej do \exp , czyli: $(\exp(\log z) = z$. Równanie to możemy spełnić, biorąc: $\log z = \log r + i\phi$. Ale możemy je

spełnić równie dobrze, biorąc: $\log z = \log r + i\phi + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Widać więc, że logarytm w dziedzinie zespolonej ma nieskończoną liczbę wartości! Ilustrujemy to, biorąc nieskończoną liczbę płaszczyzn zespolonych, rozcinając je wzdłuż (np.) osi \mathbb{R}_+ i sklejając dolne rozcięcie n -tej płaszczyzny z górnym rozcięciem $n + 1$ -wszej płaszczyzny.

Poniższa historia pochodzi z książki B. W. Szabata, "Wstęp do analizy zespolonej".

"Przypomnimy spór, jaki rozgorzał w latach 1712-1713 w korespondencji między dwoma najwybitniejszymi matematykami tamtych czasów, Janem Bernoullim i G. Leibnizem, o logarytmy liczb ujemnych. Bernoulli twierdził, że są one rzeczywiste oraz $\ln(-x) = \ln x$. A oto jeden z jego dowodów na korzyść tego twierdzenia: Z równości $(-x)^2 = x^2$ wynika, że $2\ln(-x) = 2\ln x$. Leibniz twierdził natomiast, że logarytmy liczb ujemnych są urojone, a tożsamość $\ln(-x) = \ln x$ nie zachodzi, w szczególności $\ln(-1) \neq 0$. A oto jeden z dowodów Leibniza na korzyść ostatniego twierdzenia: Jeśli podstawić $x = -2$ w rozkładzie $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$, to powstanie równość $\ln(-1) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots$, w której wszystkie składniki prawej strony są ujemne i stąd $\ln(-1) \neq 0$.

W roku 1749 do sporu włączył się L. Euler. Opublikował on artykuł, w którym twierdził, że żaden ze spierających się nie ma racji. W szczególności, przytoczony wyżej argument Bernoulliego odpiera tak: W podobny sposób z równości $(x\sqrt{-1})^4 = x^4$ można wnioskować, że $\ln x + \ln \sqrt{-1} = \ln x$, co oznacza, że $\ln \sqrt{-1} = 0$. Jednak sam Bernoulli odkrył, że $\frac{\ln \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$, a o ostatniej równości wątpić nie można, gdyż, jak pisał Euler, "odkrycie to jest uzasadnione najbardziej pewnymi środkami analizy". Przytoczony wyżej dowód Leibniza Euler także uważał za nieprzekonywający. Przytoczył on następujący przykład: Jeśli w rozkładzie $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ podstawić raz $x = -3$, a raz $x = 1$ i dodać wyniki, to powstanie równość: $0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \dots$, w której lewa strona jest równa zero, mimo że, jak pisze Euler, "prawa strona wydaje się być różna od zera".

We wspomnianym artykule Euler zaproponował prawidłowe rozwiązanie sporu: logarytmy liczb ujemnych (jak i innych liczb zespolonych) mają nieskończone zbiory wartości. Interesująca jest jego argumentacja. Wartość $y = \ln x$ wyznacza się z równania $x = \exp y = (1 + \frac{y}{i})^i$, gdzie i jest "nieskończenie wielką liczbą" (termin i oznaczenie Eulera). Otrzymujemy stąd, że $y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$, a liczba $x^{\frac{1}{i}} - 1$ "pierwiastek o nieskończenie wielkim wykładniku" - ma nieskończenie wiele wartości, ogólnie mówiąc, zespolonych.

Interesujące jest również, że w roku 1761 J. d'Alembert w sporze tym stanął po stronie Bernoulliego, przeciwko Leibnizowi i Eulerowi. "

1.18 Zastosowanie rachunku residuów do liczenia całek rzeczywistych: funkcje wieloznaczne

Kolejne klasy całek z funkcji rzeczywistych można obliczyć przez całki po płaszczyźnie zespolonej z funkcji *wieloznacznych*.

1.19 Całki postaci $\int_0^{\infty} x^{a-1} Q(x) dx$, $Q(x)$ - funkcja wymierna

Rozważymy tu całkę

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx; \quad (49)$$

ogólny przypadek rozpatruje się analogicznie do tego, co pokażemy niżej.

Aby całka (49) była zbieżna, trzeba nałożyć warunki na parametr a . Zbieżność w zerze wymaga, aby $a - 1 > -1$, tzn. $a > 0$, zaś zbieżność w nieskończoności wymaga, aby $a - 1 - 1 < -1$, tzn. $a < 1$.

Rozważmy całkę $\int_{\Gamma} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz$ po konturze Γ , składającym się z łuków okręgów Γ_r i Γ_R oraz odcinków Γ_1 i Γ_2 łączących punkty końcowe tych łuków. **RYS.** Liczbę z^{a-1} interpretujemy jako

$$z^{a-1} = \exp[(a-1)\text{Log } z],$$

tzn. bierzemy główną gałąź logarytmu: $\text{Log } z = \log |z| + i \arg(z)$, $\arg(z) \in [0, 2\pi]$. Przy tych założeniach, funkcja podcałkowa jest jednoznaczna i holomorphiczna na konturze i wewnątrz niego, z wyjątkiem $z = -1$. Wobec tego mamy:

$$\int_{\Gamma} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{1+z}, -1\right)$$

Teraz policzymy bądź oszacujemy całki po wszystkich częściach konturu Γ . Nie sprawia kłopotu całka:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = \int_r^R \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

Ile wynosi całka $\int_{\Gamma_2} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz$? Zobaczmy najspierw, ile wynosi wartość funkcji podcałkowej na *dolnym brzegu* rozcięcia. W tym celu, wystartujmy od jakiejś wartości $z = x$ na górnym brzegu rozcięcia, i obiegijmy punkt 0 po okręgu o promieniu x . Na dolnym brzegu rozcięcia będziemy mieli $z = xe^{2\pi i}$, zaś wartość funkcji $\frac{z^{a-1}}{1+z}$ wyniesie $\frac{x^{a-1}e^{(a-1)2\pi i}}{1+x} = \frac{x^{a-1}e^{2\pi ia}}{1+x}$. Mamy więc

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = e^{2i\pi a} \int_R^r \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

Oszacujmy teraz całki \int_{Γ_r} i \int_{Γ_R} . Dla pierwszej całki standardowo parametryzujemy okrąg przez $z = re^{i\phi}$ i mamy:

$$\left| \int_{\Gamma_r} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{r^a}{1-r} d\phi = 2\pi \frac{r^a}{1-r},$$

co dąży do 0, gdy $r \rightarrow 0$ (pamiętajmy, że mamy $a > 0$). Dla drugiej całki również standardowo parametryzujemy okrąg przez $z = Re^{i\phi}$ i mamy:

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^a}{R-1} d\phi = 2\pi \frac{R^a}{R-1},$$

co również dąży do 0, gdy $R \rightarrow \infty$; tu pamiętajmy, że mamy $a < 1$.

Teraz policzmy residuum funkcji podcałkowej w $z = -1$. Zauważmy najpierw, że $z^{a-1} \Big|_{z=-1} = e^{i\pi(a-1)} = -e^{i\pi a}$. Tak więc

$$\text{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{1+z}, -1\right) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^{a-1}}{1+z} (1+z) = z^{a-1} \Big|_{z=-1} = -e^{i\pi a}.$$

Ostatecznie:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\Gamma} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = (1 - e^{2i\pi a})I = 2\pi i(-)e^{i\pi a},$$

skąd ostatecznie

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

2 Zadania

2.1 Warunki Cauchy'ego-Riemanna itd.

1. Dla następujących funkcji wypisać ich części rzeczywiste i urojone. Sprawdzić, czy następujące funkcje spełniają w całej płaszczyźnie równania Cauchy'ego-Riemanna. Sprawdzić też, czy części rzeczywiste i urojone spełniają równanie Laplace'a.

(a) $f = z^3$;

(b) $f = (\operatorname{Re} z)z^2$;

(c) $f = e^{iz^2}$;

(d) $f = \bar{z}\operatorname{Re} z$;

(e) $f = \frac{1}{z}$;

(f) $f = \frac{1}{z^2+1}$.

2. Sprawdzić, czy następujące funkcje są harmoniczne. Jeśli tak, to znaleźć funkcję harmonicznie sprzężoną do danej, oraz wynik zapisać jako funkcję samego z .

(a) $x^2 - y^2 + 4xy$;

(b) $\frac{x}{x^2+y^2}$;

(c) $x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$;

(d) $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

(e) $e^x(x \cos y - y \sin y)$.

3. Obliczyć całkę $\int_{\gamma} \operatorname{Re} z dz$ dla:

(a) $\gamma = [0, 2 + 2i]$;

(b) γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 1.

4. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} |z - 1| |dz|$, gdzie γ – okrąg o środku w 0 i promieniu 1.

5. Obliczyć całkę $\int_{\gamma} |z| dz$, jeżeli:

(a) $\gamma = [-i, i]$;

(b) γ jest lewym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i ,

(c) γ jest prawym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i

6. Okrąg o środku w punkcie p i promieniu r będziemy oznaczać $C(p, r)$.

Obliczyć całkę $\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$, jeżeli:

- (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$;
- (b) $\gamma = C(0, 2)$;
- (c) $\gamma = C(i, 1)$;
- (d) $\gamma = C(-i, 1)$.

Wsk. Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste.

7. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$$

gdzie $\gamma = C(2+i, \sqrt{2})$. *Wsk.* Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

8. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 1} dz$$

gdzie $\gamma = C(a, a)$, $a > 1$. *Wsk.* Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste i korzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

9. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$$

gdzie $\gamma = C(0, 2a)$, $a > 0$. *Wsk.* jw.

10. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

gdzie:

- (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$,
- (b) $\gamma = C(1, \frac{1}{2})$.

Wsk. Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego dla drugiej pochodnej funkcji holomorficznej.

11. Dla podanych niżej funkcji znaleźć cztery początkowe różne od zera współczynniki rozwinięcia w szereg Taylora wokół $z = 0$, oraz podać promień zbieżności R odpowiedniego szeregu Taylora:

- (a) $\exp \frac{z}{1-z}$;

(b) $\sin \frac{z}{1-z}$;

(c) $\cos^2 z$;

(d) $\frac{1}{\cos z}$.

12. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:

(a) $|z| < 1$;

(b) $1 < |z| < 2$;

(c) $|z| > 2$.

13. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:

(a) $|z| < 1$;

(b) $1 < |z| < 2$;

(c) $|z| > 2$.

14. Znaleźć residua funkcji:

(a) $\frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)}$ w punktach $0, 1, -1$;

(b) $\frac{e^{z^2}}{z^2(z-1)}$ w punktach $0, 1$;

(c) $\frac{e^{ez}}{1-z^4}$ w punktach $1, -1, i, -i$;

(d) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$ ($a \neq 0$) w punktach $ai, -ai$; **Odp.** $\frac{-ie^{-am}}{4a^3}(am+1)$ w punkcie ai

(e) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^3}$ ($a \neq 0$) w punktach $ai, -ai$;

(f) $(z^3 - z^5)^{-1}$ w punktach osobliwych;

(g) $\operatorname{ctg}^3 z$ w punktach osobliwych;

(h) $\sin \frac{z}{z+1}$ w punktach osobliwych;

(i) $\frac{1}{(1+z^2)^4}$ z punkcie i ;

(j) $\frac{z^6}{(1+z)^3}$ w punkcie -1 .

2.2 Całki trygonometryczne

15. Wykazać, że przy $0 < b < a$ zachodzi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

16. Wykazać, że przy $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos 2\theta} = \pi \frac{1 - a + a^2}{1 - a}$$

17. Wykazać, że dla $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}^3}$$

2.3 Całki z funkcji wymiernych

18. Wykazać, że

$$(a) \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3} \quad (a > 0);$$

$$(b) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}, \quad a, b > 0;$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{x^6 dx}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}, \quad a > 0.$$

2.4 Całki z funkcji wymiernych razy f. trygonometryczne

19. Wykazać, że

$$(a) \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad (a > 0);$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{x \sin x dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi e^{-a}}{4a} \quad (a > 0);$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b} \right) \quad (a \neq b, a, b > 0);$$

$$(d) \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi e^{-a}(a^2 + 3a + 3)}{2^3 a^5} \quad (a > 0); \text{ Uwaga. wynik sprawdzony dla } a = 1 \text{ only}$$

2.5 Całki z funkcji wieloznacznych

Terminologia: *Konturem ODS*² będziemy nazywać figurę, złożoną z dwóch półkregów o promieniach r oraz R ($R > r$), o środkach w 0 i leżących

²Geneza nazwy ODS była na wykładzie

w górnej półpłaszczyźnie, oraz odcinków $[-R, -r]$ i $[r, R]$, leżących na osi rzeczywistej.

20. Całkując funkcję $f(z) = (\text{Log}z)^2(z^2 + a^2)^{-1}$ po konturze ODS wykazać, że przy $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{8a}(\pi^2 + 4(\log a)^2), \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

21. Wykazać w podobny sposób, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1 + x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

22. Całkując po "dziurce od klucza" funkcję: $\exp(a \text{Log}z(z^2 + 1)^{-2})$ wykazać, że dla $-1 < a < 3$

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi(1 - a)}{4 \cos \frac{\pi a}{2}}.$$

Skąd się bierze powyższy warunek na a ?

23. Całkując funkcję $\frac{\text{Log}z}{1+z^2}$ wzdłuż brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R\} \cap \{z : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$ wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^4} dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1 + x^4} dx = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

24. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2 + a^2)^2} dx = 2^{-3/2} \pi a^{-5/2} \left(\frac{3}{2} \log a - 1 - \frac{3\pi}{4} \right), \quad a > 0.$$

25. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log(1 + x^2)}{1 + x^2} dx = \pi \log 2.$$

Wsk. Całkować funkcję $\frac{\text{Log}(z+i)}{1+z^2}$ po brzegu górnego półkola $K(0, R)$.