

Zad. 1.1. Pokazać, że formuła logiczna

$$(p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)) \Rightarrow q$$

jest tautologią, i objaśnić jak odpowiada ona schematowi wnioskowania "dowód nie wprost". Pokazać przykład zastosowania tego schematu, np. do dowiedzenia że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zad. 1.2. Pokazać, że formuła logiczna

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$$

jest tautologią, i objaśnić jak odpowiada ona schematowi wnioskowania "dowód w dwie strony". Pokazać przykład zastosowania tego schematu, np. do dowiedzenia, że

$$\forall n \in \mathbb{N} : (6|n \Leftrightarrow (2|n \wedge 3|n))$$

(Relację podzielności $|$ formalnie definiujemy jako $a|b \Leftrightarrow^{\text{def}} \exists k \in \mathbb{Z} : b = ak$).

Zad. 1.3. Pokazać, że formuła logiczna

$$((p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

jest tautologią, i objaśnić jak odpowiada ona schematowi wnioskowania "dowód przez przypadki". Doprowadzić studentów do wyprowadzenia formuły obejmującej dowolną liczbę przypadków:

$$((\exists p \in A : p) \wedge (\forall p \in A : p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

Pokazać przykład zastosowania tego schematu, np. do dowiedzenia że

$$\forall n \in \mathbb{N} : 6|(n^3 - n)$$

Zad. 1.4. Używając definicji operacji i relacji na zbiorach

$$A \cup B =^{\text{def}} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

$$A \cap B =^{\text{def}} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$$A \setminus B =^{\text{def}} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow^{\text{def}} \forall x : ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

udowodnić formalnie, że

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$((A \subset B) \wedge (A \subset C)) \Leftrightarrow (A \subset (B \cap C))$$