

Zad. 2.1. Zdefiniujmy relację $\sim$ w zbiorze $\mathbb{R}$ następująco:

$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}$$

Udowodnić, że jest to relacja równoważności. Naszkicować na płaszczyźnie wykres relacji.

Zad. 2.2. Zdefiniujmy relację $\sim$ w zbiorze $\mathbb{N}$ następująco:

$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad x - y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$$

Udowodnić, że NIE jest to relacja równoważności. Naszkicować na płaszczyźnie wykres relacji.

Zad. 2.3. Zdefiniujmy relację $\sim$ w zbiorze $\mathbb{N}$ następująco:

$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad 2x - y \in \mathbb{Z}$$

Udowodnić, że NIE jest to relacja równoważności. Naszkicować na płaszczyźnie wykres relacji.

Zad. 2.4. Zdefiniujmy relację $\sim$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$ następująco:

$$(x, y) \sim (p, q) \quad \Rightarrow \quad |x - p| < |y - q|$$

Naszkicować na płaszczyźnie zbiory punktów będących w relacji z punktami $(1, 1)$ oraz $(1, 0)$.

Zad. 2.5. Zdefiniujmy relację $\sim$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$ następująco:

$$(x, y) \sim (p, q) \quad \Rightarrow \quad |x - p| + |y - q| < 2$$

Udowodnić, że NIE jest to relacja równoważności. Naszkicować na płaszczyźnie zbiory punktów będących w relacji z punktami $(1, 1)$ oraz $(0, 1)$.

Zad. 2.6. Zdefiniujmy relację $\sim$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$ następująco:

$$(x, y) \sim (p, q) \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = p^2 - q^2$$

Udowodnić, że jest to relacja równoważności. Naszkicować na płaszczyźnie zbiory punktów będących w relacji z punktami $(1, 1)$ oraz $(0, 1)$.

Zad. 2.7. Zdefiniujmy relację $\preceq$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$ następująco:

$$(x, y) \preceq (p, q) \quad \Rightarrow \quad (x < p) \vee ((x = p) \wedge (y \leq q))$$

Udowodnić, że jest to relacja porządku liniowego. Naszkicować na płaszczyźnie zbiory punktów będących w relacji z punktami $(1, 1)$ oraz $(0, 1)$.

Zad. 2.8. Zdefiniujmy relację $\preceq$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$ następująco:

$$(x, y) \preceq (p, q) \quad \Rightarrow \quad (x \leq p) \wedge (y \leq q)$$

Udowodnić, że jest to relacja częściowego porządku, ale nie porządku liniowego. Naszkicować na płaszczyźnie zbiory punktów będących w relacji z punktami $(1, 1)$ oraz $(0, 1)$.

Zad. 2.9. Niech $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $g(x) = f(\frac{x-2}{3})$. Uprościć $g(x)$ i znaleźć największy podzbiór $\mathbb{R}$ który może być dziedziną funkcji g .

Zad. 2.10. Niech $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, $g : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$. Znaleźć wzory na $f(g(x))$, $g(f(x))$ oraz znaleźć dziedzinę i zbiór wartości obu tych funkcji złożonych.

Zad. 2.11. Znaleźć zbiór wartości funkcji f . Czy funkcja f jest injekcją/surjekcją/bijekcją? Jeśli jest bijekcją, znaleźć wzór na funkcję odwrotną.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$
- $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow]-1, 1[$, $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$
- $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $f(x) = (x^2 - 1)^2$
- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = \frac{n}{2}$ dla parzystych n , $f(n) = \frac{-1-n}{2}$ dla nieparzystych n .

Zad. 2.12. Korzystając z indukcji matematycznej, udowodnić, że dla dowolnego naturalnego n

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$
- $4^n + 15n - 1$ jest podzielne przez 9
- $n^7 - n$ jest podzielne przez 7
- wielomian $(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1$ jest podzielny przez $x^2 - 2x + 1$
- (ciąg Fibonnacciego) Jeśli $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$$