

Zad. 3.1. Pokazać, że zbiór liczb postaci $m\sqrt{5} - n$, $m, n \in \mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Zad. 3.2. Pokazać, że liczba 2 jest ograniczeniem górnym zbioru liczb postaci $\frac{3n+1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ ale nie jest kresem górnym tego zbioru. Pokazać, że $\frac{3}{2}$ jest kresem górnym tego zbioru.

Zad 3.3 Udowodnić, że kresami górnym i dolnym zbioru liczb postaci $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ są odpowiednio $\sqrt{2} - 1$ oraz 0.

Zad. 3.4. Pokazać z definicji że ciąg $a_n = q^n$ jest zbieżny do 0 dla $|q| < 1$, zbieżny do 1 dla $q = 1$ i nie zbieżny dla $q = -1$ lub $|q| > 1$.

Zad. 3.5. Pokazać z definicji, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \infty$

Zad. 3.6. Pokazać, że ciąg $a_n = \frac{n+1}{n+3} \cos \frac{2\pi n}{3}$ nie jest zbieżny. (Wystarczy pokazać istnienie podciągów zbieżnych do różnych granic.)

Zad. 3.7. Wyznaczyć granice ciągów (już nie z definicji, można korzystać z różnych twierdzeń): **a.** $a_n = \frac{5n^2+3n+2}{n^2+2}$, **b.** $a_n = \frac{4n^3-3n}{2n^2+4}$, **c.** $a_n = \left(\frac{2n-5}{3n+7}\right)^2$, **d.** $a_n = \frac{4n^2+3n}{3n^3-1}$, **e.** $a_n = \frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1}$, **f.** $a_n = \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{8n^3-3n^2}}$, **g.** $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$, **h.** $a_n = \sqrt{3n^2+2n+5} - n\sqrt{3}$, **i.** $a_n = \sqrt{n^4+n^3-n^2} - \sqrt{n^2+n}$, **j.** $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2-n}$, **k.** $a_n = n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1})$, **l.** $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2+1}$