

Zad. 4.1. Wyznaczyć granice ciągów: **a.** $a_n = \sqrt{n^4 + n^3} - n^2 - \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + n}$,
b. $a_n = \frac{10 - 3 \cdot 4^{n+1}}{5 \cdot 4^n + 3}$, **c.** $a_n = \frac{3^{2n+2} - 4^{n+1}}{3^{2n+1} + 4^{n+2}}$, **d.** $a_n = \frac{\sqrt[3]{2^{n+1}}}{\sqrt[3]{3^{n+1}}}$, **e.** $a_n = \log_c(n^2 + 4n + 1) - \log_c(8n^6 + 3n + 4)$, $c > 1$, **f.** $a_n = \frac{\log_c 3n^2 + 1}{\log_c n + 1}$, **g.** $a_n = \sqrt[n]{1 + n^3}$, **h.** $a_n = (1 + 2^n)^{2/n^2}$, **i.** $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$

Zad 4.2 Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, znaleźć granice ciągów **a.** $a_n = \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{2})^n}$, **b.** $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n + 5^n}{2^n + 7^n}}$, **c.** $a_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^3 + (-1)^n n^{\frac{3}{2}}}$, **d.** $a_n = \frac{n \sin(\frac{\pi n}{6})}{\sqrt{n^3 + 1}}$, **e.** $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Zad 4.3 W zależności od wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ znaleźć granice ciągów **a.** $a_n = \frac{(c-2)^{n+1}}{(c^2 - 2c - 3)^{n-2}}$, **b.** $a_n = \sqrt{n^2 + n^c} - n$, **c.** $a_n = \sqrt[n]{1 + c^n}$

Zad. 4.4 Pokazać, że ciąg

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Zad. 4.5 Niech $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Pokazać, że ten ciąg jest zbieżny (przez pokazanie, że jest rosnący i ograniczony), oraz znaleźć jego granicę.

Zad. 4.6 Niech $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Pokazać, że ten ciąg jest zbieżny, oraz znaleźć jego granicę. (Wskazówka: rozważyć osobno podciągi złożone z wyrazów o indeksach parzystych i nieparzystych.)

Zad. 4.7 Niech $c > 0$, $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$. Pokazać że ten ciąg jest zbieżny, oraz znaleźć jego granicę.

Zad. 4.8 Znaleźć granice ciągów **a.** $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, **b.** $\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$, **c.** $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}$,
d. $\left(\frac{n^3}{n^3+n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1}$, **e.** $(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})^{n^2}$, **f.** $n(\log_2(n+2) - \log_2 n)$,
g. $\frac{2n+1}{n^3(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2))}$, **h.** $n \sinh \frac{1}{n}$, **i.** $n^2(\cosh \frac{1}{n} - 1)$, **j.** $\frac{n}{2^n}$, **k.** $\frac{n!}{n^n}$, **l.** $\frac{10^n}{n!}$,
m. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.