

Zad. 5.1. Wykorzystując twierdzenie Stolza, znajdź granice ciągów: **a.** $a_n = \frac{1^5+2^5+\dots+n^5}{n^6}$, **b.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$, **c.** $a_n = \frac{1^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{4}}+\dots+(2n+1)^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{5}{4}}}$

Zad. 5.2. Narysuj dla metryk d_1 oraz d_∞ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ d-odcinki, czyli zbiory

$$[a, b] := \{p \in \mathbb{R}^2 : d(a, p) + d(p, b) = d(a, b)\}$$

(można przyjąć $a = (0, 0)$, rozpatrz różne punkty b).

Zad. 5.3. Narysuj różne d-kule i d-odcinki na $\mathbb{R}^2$ dla metryki "rzymskiej" ("Wszystkie drogi prowadzą do Rzymu") danej wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{jeżeli punkty } x, y \text{ i } (0, 0) \text{ leżą na jednej prostej} \\ |x| + |y| & \text{jeżeli punkty } x, y \text{ i } (0, 0) \text{ nie leżą na jednej prostej} \end{cases}$$

gdzie $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Zad. 5.4. Niech $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $d(x, y) = \min\{|x - y|, 2 - |x| - |y|\}$. Pokaż, że d jest metryką na X , naszkicuj różne d-kule i d-odcinki.

Zad. 5.5. Niech $a \geq 0$. Niech (X, d) będzie zbiorem funkcji ograniczonych na przedziale $[a, \infty[$ o wartościach w $\mathbb{R}$, z metryką supremum

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, \infty[\}$$

Pokaż, że dla $a = 0$, dla ciągu funkcji f_n danych wzorami $f_n(x) = e^{-nx}$ funkcja g dana wzorem $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ NIE jest granicą (względem podanej metryki). Pokaż, że dla $a > 0$, g jest granicą f_n .

Zad. 5.6. Zbadaj, czy zbiory $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$, $B = \bigcap_{n=2}^{\infty}] - \frac{1}{n}, \frac{n}{n-1}[$, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ są otwarte bądź domknięte.