Zad. 5.1. Wykorzystując twierdzenie Stolza, znaleźć granice ciągów: **a.** $a_n = \frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}$, **b.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$, **c.** $a_n = \frac{1^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{4}}+\cdots+(2n+1)^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{5}{4}}}$

Zad. 5.2. Narysować dla metryk L^1 oraz L^∞ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ d-odcinki, czyli zbiory

$$[a,b] := \{p \in \mathbb{R}^2 : d(a,p) + d(p,b) = d(a,b)\}$$

(można przyjąć $a = (0,0)$, rozpatrzyć różne punkty b).

Zad. 5.3. Narysować różne d-kule i d-odcinki na $\mathbb{R}^2$ dla metryki żzymskiej"("Wszystkie drogi prowadzą do Rzymu") danej wzorem

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{jeżeli punkty } x,\ y \text{ i } (0,0) \text{ leżą na jednej prostej} \\ |x|+|y| & \text{jeżeli punkty } x,\ y \text{ i } (0,0) \text{ nie leżą na jednej prostej} \end{cases}$$

gdzie $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Zad. 5.4. Niech $X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $d(x,y) = \min\{|x-y|, 2-|x|-|y|\}$. Pokazać, że d jest metryką na X, naszkicować różne d-kule i d-odcinki.

Zad. 5.6. Zbadać, czy zbiory $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{n}{n-1}[$, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ są otwarte bądź domknięte.