

Zad. 6.1. Korzystając z definicji Heine'go (ciągowej) granicy funkcji zbadać istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{\pi}{x}$.

Zad. 6.2. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji zbadać istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Zad. 6.3. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x+t^2}{t+x^2}$.

Zad. 6.4. Korzystając z definicji Cauchy'ego zbadać ciągłość funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x = 2$.

Zad. 6.5. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Rozstrzygnąć, w jakich punktach funkcja $f(x)$ jest ciągła.

Zad. 6.6. Pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na $]0, 2[$. Pokazać, że funkcja $g(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła na $]1, \infty[$.

Zad. 6.7. Pokazać, że funkcje $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \frac{1}{x}$ nie są jednostajnie ciągłe na $]0, \infty[$.

Zad. 6.8. Obliczyć granice **a.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$, **b.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$, **c.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, **d.** $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$, **e.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **f.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$, **g.** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$, **h.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

Zad. 6.9. Obliczyć (jeśli istnieją) granice lewo- i prawostronne **a.** $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} e^{-\frac{1}{x}}$, **b.** $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{x^2-x+|x-1|}{x-1}$, **c.** $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$, **d.** $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} (x \sin \frac{1}{x} - \cos x)$, **e.** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{|x - \frac{\pi}{2}|}$