

Zad. 7.1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$. Obliczyć

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y), \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y), \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right), \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

Pokazać, że nie istnieje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Zad. 7.2 Znaleźć granice **a.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$, **b.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-\sqrt{x})}{x-1}$, **c.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{x^2}$.

Zad. 7.3 Z definicji policzyć pochodne funkcji **a.** $f(x) = ax^2 + bx + c$, **b.** $f(x) = \sqrt{x}$, **c.** $f(x) = \ln x$, **d.** $f(x) = e^x$, **e.** $f(x) = \sin x$, **f.** $f(x) = \cos x$.

Zad. 7.4 Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zad. 7.5. Policzyć (już nie z definicji) pochodne funkcji $f(x)$: **a.** x^p , $p \in \mathbb{R}$,
b. $\operatorname{tg} x$, **c.** $\frac{3x^2}{7x^2-4x+5}$, **d.** $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$, **e.** $\sqrt{1-x^2}$, **f.** $\ln(|\sin x|)$, **g.** $\ln(|\cos x|)$, **h.** $\sin(ax+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, **i.** $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, **j.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, **k.** $\arcsin \frac{1-x}{1+x}$, **l.** $\arctan \frac{x}{1-x^2}$,
m. $e^{x^2 \sin x}$, **n.** $(x + \frac{1}{x})^x$; ewentualnie dodatkowe przykłady wedle uznania.

Zad. 7.6. Znaleźć ogólne wzory na n -te pochodne funkcji $\sin x$, $\ln x$, $\sqrt{1+x}$.

Zad. 7.7. Znaleźć, dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a \sin x + b \cos x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna na całej dziedzinie.