Zad. 8.1. Dobrać parametry a,b,c tak aby funkcja f była różniczkowalna na $\mathbb{R}$:

a.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+a^2} & \text{dla } x \leq 0 \\ ax^2+bx+c & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

b.

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{dla } x \leq \pi \\ \sin x + b & \text{dla } x > \pi \end{cases}$$

Zad. 8.2. Niech $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$. Pokazać że wykresy tych funkcji mają tylko jeden punkt przecięcia. Znaleźć równania prostych stycznych do tych wykresów w punkcie ich przecięcia. Znaleźć równanie prostej stycznej do obu wykresów.

Zad. 8.3. Znaleźć pole powierzchni trójkąta odciętego z pierwszej ćwiartki płaszczyzny przez prostą styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie $x = 2$.

Zad. 8.4. Znaleźć równanie prostej prostopadłej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ w punkcie w którym $f''(x) = 0$.

Zad. 8.5. Dany jest okrąg o promieniu R. Rozważyć trójkąty równoramienne, których jeden wierzchołek znajduje się w środku okręgu, a dwa pozostałe leżą na okręgu. Rozstrzygnąć, które z nich mają największe pole powierzcni, i znaleźć to pole.

Zad. 8.6. W zależności od wartości parametru a znaleźć punkt paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ najbliższy punktowi o współrzędnych $(0, a)$.

Zad. 8.7. Znaleźć punkty przegięcia funkcji $f(x) = (1 + 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ i równania prostych stycznych do jej wykresu w punktach przegięcia.

Zad. 8.8. Zbadać przebieg i naszkicować wykresy funkcji: **a.** $\frac{x^3}{x^2-1}$, **b.** $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$, **c.** $\left(x - \frac{3}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$, **d.** $x^3 - 6x^2 + 4$, **e.** $x^2\mathrm{e}^{-x}$, **f.** $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$, **g.** $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, **h.** $x\mathrm{arctg}x$

Zad. 8.9. Korzystając z reguły de l'Hospitala wyznaczyć granice **a.** $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1-x}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$, **b.** $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$, **c.** $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{1+\cos(\pi x)}$, **d.** $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, **e.** $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\mathrm{tg}x}$, **f.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(3x)} - \sqrt[4]{\cos(4x)}}{1-\cos(5x)}$, **g.** $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x}}{\ln(\cos x)}$