

Zad. 1. Rozstrzygnij, czy podane formuły logiczne są tautologiami

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \quad (1)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)) \quad (2)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)) \quad (3)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \left(((p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)) \vee r \right) \quad (4)$$

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r) \quad (5)$$

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow r) \quad (6)$$

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \quad (7)$$

$$\left(((\neg p) \Rightarrow q) \rightarrow r \right) \Leftrightarrow \left(((\neg q) \Rightarrow p) \Rightarrow r \right) \quad (8)$$

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad (9)$$

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad (10)$$

Zad. 2. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C

$$(A \subset B) \Rightarrow ((C \setminus B) \subset (C \setminus A)) \quad (11)$$

$$((A \cap B) \subset C) \Leftrightarrow ((B \setminus C) \subset (B \setminus A)) \quad (12)$$

$$((A \subset C) \wedge (B \subset C)) \Leftrightarrow ((A \cup B) \subset C) \quad (13)$$

$$((A \subset B) \wedge (A \subset C)) \Leftrightarrow (A \subset (B \cap C)) \quad (14)$$

$$((A \subset C) \vee (B \subset C)) \Rightarrow ((A \cap B) \subset C) \quad (15)$$

$$((A \subset B) \vee (A \subset C)) \Rightarrow (A \subset (B \cup C)) \quad (16)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \quad (17)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (18)$$

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B \quad (19)$$

Zad.3 Rozstrzygnij, czy poniżej zdefiniowane relacje są relacjami równoważności.

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad (20)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad (21)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \quad (22)$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow^{\text{def}} |a_1 - a_2| < 1 \quad (23)$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 a_2 \geq 0 \quad (24)$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{zbiór ciągów o elementach w } \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow^{\text{def}} \forall n \in \mathbb{N} : a_n b_n > 0 \quad (25)$$

Zad.4 Rozstrzygnij, czy poniżej zdefiniowane relacje są relacjami relacjami porządku (ostrego lub nieostrego), i czy jest on porządkiem pełnym (liniowym)

czy tylko częściowym).

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 b_1 < a_2 b_2 \quad (26)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 b_1 \leq a_2 b_2 \quad (27)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 + a_2 < b_1 + b_2 \quad (28)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \leq a_2 + \frac{b_2}{a_2 + b_2} \quad (29)$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{zbiór ciągów o elementach w } \mathbb{R}),$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow^{\text{def}} \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \quad (30)$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{zbiór ciągów o elementach w } \mathbb{R}),$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow^{\text{def}} \exists n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \quad (31)$$

Zad.5 Rozstrzygnij, czy poniżej zdefiniowane relacje są relacjami funkcyjnymi. Jeśli są funkcjami, rozstrzygnij, czy są iniekcjami, surjekcjami i bijekcjami, i znajdź ich zbiór wartości.

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} (a_2 = a_1 + b_1) \wedge (a_1 = a_2 + b_2) \quad (32)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} (a_2 = a_1 + b_1) \wedge (a_1 = a_2 + b_2) \quad (33)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 = a_2 - b_2 = b_2 - b_1 \quad (34)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} a_1 = a_2 - b_2 = b_2 - b_1 \quad (35)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} (a_2 = a_1 + b_1) \wedge (b_2 = a_1 - b_1) \quad (36)$$

$$(a_i, b_i) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow^{\text{def}} (a_2 = a_1 + b_1) \wedge (b_2 = a_1 - b_1) \quad (37)$$

$$f, g \in (\text{funkcje z } \mathbb{R} \text{ w } \mathbb{R}), \quad f \sim g \Leftrightarrow^{\text{def}} \forall x \in \mathbb{R} : g(x) = f(x+1) - f(x) \quad (38)$$

Zad.6 Udowodnij, że

$$\forall n \in \mathbb{N} : 10^{2n+1} + 1 \text{ jest podzielne przez } 11 \quad (39)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : n(n^2 + 1)(n^2 - 1) \text{ jest podzielne przez } 5 \quad (40)$$

$$\forall q \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{k=1}^n k q^k = q \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(q-1)^2} \quad (41)$$

$$\left(a_0 = 0 \wedge a_1 = 1 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n) \right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} : a_n = 3^n - 2^n \right) \quad (42)$$

$$\left(a_0 = 1 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})) \right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} : |a_{n+1} - \sqrt{2}| < |a_n - \sqrt{2}| \right) \quad (43)$$