

1. Udowodnić, że:

- (a) 1 jest ograniczeniem górnym zbioru  $Z = \{\sqrt{n^2 + n} - n : n \in N\}$ , ale nie jest jego kresem górnym;  $\sqrt{2} - 1$  oraz  $\frac{1}{2}$  są kresami zbioru.
- (b) 0 oraz  $\frac{1}{2}$  są kresami zbioru  $Z = \{\frac{mn}{m^2+n^2} : m, n \in N\}$ .

Czy kresy należą do zbiorów  $Z$ ?

2. Zbadać ograniczoność ciągu:

- (a)  $a_n = (-2)^n$
- (b)  $a_n = \frac{(-4)^n}{1+2^n}$
- (c)  $a_n = n \sin \frac{\pi n}{2}$

3. Pokazać z definicji, że:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+n+2} = \frac{2}{3}$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \infty$

4. Wyznaczyć granicę ciągu:

- (a)  $x_n = \sqrt[50]{n^{50} + n^{49}} - n$
- (b)  $x_n = (n^7 + 7)^{-7} \sqrt{(n+2)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}$
- (c)  $x_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1}$   
Wskazówka: skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia i wprowadzić nowe zmienne  $a = k-1, b = k+1$
- (d)  $x_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n-7}}$
- (e)  $x_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$
- (f)  $x_n = \frac{53^{2n}-1}{49^n+7}$
- (g)  $x_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2-n+k}}$
- (h)  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k}$
- (i)  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^4+k}}{n^3+k}$
- (j)  $x_n = 3n \ln(1 - \sqrt[3]{n^3 + e^2n + 100} + \sqrt[3]{n^3 + e^3n - 100})$
- (k)  $x_n = \frac{(2n)!}{n!(2n+1)^n}$
- (l)  $x_n = \frac{(3n+a)!}{(3n+2)^n(2n+b)!}$ , gdzie  $a, b \in N$

5. Zbadać zbieżność ciągów:

- (a)  $x_n = \cos(\frac{\pi n^3}{2n^2+n})$
- (b)  $x_n = \frac{n}{2n+1} \sin(\frac{2\pi n}{3})$

6. Wyznaczyć granicę ciągu, zadanego rekurencyjnie:

- (a)  $x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n+1}, x_0 > 0$
- (b)  $x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ , gdzie  $a > 0$
- (c)  $x_n = \frac{6}{2x_n+1}, x_0 > 0$  (wskazówka: rozważyć podciągi o parzystych i nieparzystych indeksach).