

Zad. 1. Znajdź granice ciągów lub udowodnij ich nieistnienie: **a.** $(1+n^2)^{\frac{1}{n^2}}$, **b.** $(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}$, **c.** $(\sqrt{n^2+2} - n)^n$, **d.** $n \ln \frac{n^2+4n+3}{n^2+7n-6}$, **e.** $n^2(\ln(n+1) + \ln(n+3) - 2\ln(n+2))$, **f.** $n^2 \ln \cos \frac{1}{n}$, **g.** $\frac{n}{(\ln n)^n}$, **h.** $\frac{(\ln n)^n}{\ln(n^n)}$, **i.** $\frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$, **j.** $\sqrt[n]{n!}$, **k.** $\frac{\sqrt[n]{n!}}{\log n}$, **l.** $\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\dots+\sqrt{2n+1}}{1+\sqrt{4}+\sqrt{7}+\dots+\sqrt{3n+1}}$, **m.** $\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\dots+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+5}+\dots+\sqrt{4n+1}}$, **n.** $\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[n]{n})-n}{(\ln n)^2}$.

Zad. 2. Znajdź granicę ciągów zadanych rekurencyjnie, lub udowodnij ich nieistnienie: **a.** $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2(a_n^3+1)}{3a_n^2}$, **b.** $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2(a_n^3-1)}{3a_n^2}$, **c.** $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$, **d.** $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$.

Zad. 3. Sprawdź, czy podana niżej funkcja jest metryką na **a.** przedziale $[-1, 1]$, **b.** zbiorze liczb rzeczywistych:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{jeśli } x - y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{jeśli } x - y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zad. 4. Udowodnij, że podana niżej funkcja jest metryką na zbiorze $]0, 1[\times]0, 1[$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{|x_1 - x_2|, 1 - |x_1 - x_2|\} + \min\{|y_1 - y_2|, 1 - |y_1 - y_2|\}$$

Naszkicuj kulę $B((\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \frac{1}{2})$ względem tej metryki.

Zad. 5. Udowodnij, że podana niżej funkcja jest metryką na zbiorze $]0, 1[\times]0, 1[$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, 1 - |x_1 - x_2| + |1 - y_1 - y_2|\}$$

Naszkicuj kulę $B((\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \frac{1}{2})$ względem tej metryki.

Zad. 6. Znajdź podane granice funkcji, lub udowodnij ich nieistnienie: **a.** $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$, **b.** $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$, **c.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$, **d.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, **e.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, **f.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, **g.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x)$, **h.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(1 - \frac{x^2}{\pi^2})}$, **i.** $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x(1 - \frac{x^2}{\pi^2})}$, **j.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2\arctg x)$, **k.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\pi - 2\arctg x) - x$.

Zad. 7. Znajdź pochodne lewostronne i prawostronne podanych funkcji, w punktach gdzie one istnieją: **a.** $\frac{\sin x}{|x|}$, **b.** $\frac{x+1}{|x|+1}$, **c.** $\frac{1}{1+|x|^{\frac{2}{3}}}$, **d.** $\frac{1}{1+|x|^{\frac{3}{2}}}$, **e.** $e^{\frac{1}{x}}$, **f.**

$\ln(1+x^2)$, **g.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, **h.** $\frac{1}{\sin x}$, **i.** $\frac{\arcsin x}{x}$, **j.** $\frac{\arctg x}{x}$, **k.** $\frac{1}{1+e^{-x}}$, **k.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Zad. 8. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f''(x_0) > 0$. Znajdź wartości parametrów a, c, r (w zależności od $f(x_0)$, $f'(x_0)$ i $f''(x_0)$) takie, by funkcja

$$g(x) = \begin{cases} c - \sqrt{r^2 - (x-a)^2} & \text{dla } a-r < x < x_0 \\ f(x) & \text{dla } x \geq x_0 \end{cases}$$

była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 .

Zad. 9. Niech $f : [-1, \infty[\rightarrow [-\frac{1}{e}, \infty[$ będzie dane wzorem $f(x) = xe^x$. Udowodnij, że funkcja jest monotoniczna i jest bijekcją. Niech W będzie funkcją odwrotną do f . (Jest to tzw. *funkcja W Lamberta*.) Oblicz $W'(0)$, $W''(0)$, $W'(e)$ i $W''(e)$.

Zad. 10. Zbadaj przebieg i naszkicuj wykresy funkcji **a.** $\frac{1}{1+e^x}$, **b.** $\frac{x}{1-e^x}$, **c.** $\frac{1-e^x}{1+e^x}$, **d.** $\frac{x^3}{1+x^2}$, **e.** $\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}$, **f.** $x^2 \ln |x|$, **g.** $\frac{1}{\ln x}$.