

Zadanie 1.

Obliczyć całki nieoznaczone:

- | | |
|--|--|
| (a) $\int \frac{x\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x^2} dx$ | (g) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$ |
| (b) $\int \sqrt{a+bx} dx$. | (h) $\int \sqrt{x} \ln x dx$. |
| (c) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ | (i) $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} dx$ |
| (d) $\int \frac{dx}{2 \cos^2 3x}$ | (j) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$, podstawić $x+1 = t^6$ |
| (e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x }}$. | (k) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$, podstawić $x = t^6$ |
| (f) $\int \frac{\ln \arctg x dx}{1+x^2}$ | |

Zadanie 2.

Obliczyć całki nieoznaczone¹:

- | | |
|--|--|
| (a) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; | (n) $\int x^{-\frac{3}{2}} \log(1+\sqrt{x}) dx$; |
| (b) $\int \sqrt{x} (\log x)^2 dx$; | (o) $\int \frac{\log 1-x }{x^{n+1}} dx$; |
| (c) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; | (p) $\int (\frac{x}{\arctan x} - 1)^{-2} dx$; |
| (d) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; | (q) $\int \sin(\log x) dx$; |
| (e) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$; | (r) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$; |
| (f) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}$; | (s) $\int \frac{\tan 2x dx}{2-3\cos^2 x}$; |
| (g) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+1}}$; | (t) $\int \frac{\sin x \cos^3 x dx}{2+\sin^2 x}$; |
| (h) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^3}}$; | (u) $\int \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4} dx$; |
| (i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}$; | (v) $\int e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx$; |
| (j) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$; | (w) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x}}$; |
| (k) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; | (x) $\int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+x}}$; |
| (l) $\int \frac{1}{x^2} \arcsin x dx$; | (y) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-x^2}}$; |
| (m) $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$; | (z) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$; |

Zadanie 3.

Obliczyć całki oznaczone²:

- | | |
|---|---|
| (a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; | (g) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ |
| (b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$; | (h) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| (c) $\int_2^3 \frac{dx}{x \log x}$; | (i) $\int_0^1 \log^3 x dx$; |
| (d) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$; | (j) $\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$; |
| (e) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; | (k) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$; |
| (f) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ | (l) $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, $n \in \mathbb{N}$; |
| | (m) $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx$; |

¹Poziom zaawansowany.

²Poziom zaawansowany.

- (n) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$;
 (o) $\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;
 (p) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$;
 (q) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$;
 (r) $\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx, m, n \in \mathbb{N}, a < b$;
 (s) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx, n \in \mathbb{N}$;
 (t) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1} dx$;

Zadanie 4.

Wyrazić $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli

- (a) $F_n(x) := \int (\frac{x^2}{x^2+1})^n dx$
 (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x(x^2+1)^n}$ (wyliczyć $F_4(x)$)
 (c) $F_n(x) := \int \frac{x^p dx}{\log^n x}, p \in \mathbb{R}$
 (d) $F_n(x) := \int x^{p-n} e^x dx, p \in [0, 1[$
 (e) $\int \frac{dx}{x^n(1+x)}$ (wyprowadzić wzór na $F_n(x)$)

Zadanie 5.

Znaleźć wzór rekurencyjny, wyrażający $F_{n+2}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli:

- (a) $F_n(x) := \int \cos^n x dx$
 (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{\sin^n x}$
 (c) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x^n(x^2+1)}$
 (d) $F_n(x) := \int x^n \cos x dx$

Zadanie 6.

Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranej całki wyliczyć granice:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$;
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}) = \log k$ dla $2 \leq k \in \mathbb{N}$;
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{\log 2}$.

Zadanie 7. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = x^3 + x^2 - 2x$, odcinkiem osi Ox oraz rzędnymi w punktach $x = -2, x = 2$. Odp. $P = \frac{37}{6}$

Zadanie 8. Obliczyć pole zawarte pomiędzy parabolami $y^2 = x, x^2 = 8y$.

Zadanie 9. Obliczyć pole zawarte pomiędzy liniami $y = x^3, y = 4x$.

Zadanie 10. Obliczyć pole wspólnego obszaru ograniczonego krzywymi $y = 2x^3, y^2 = 4x$.

Zadanie 11. Obliczyć pole ograniczone linią $y = x \sin 4x$, odcinkiem osi Ox w przedziale $0 \leq x \leq \frac{1}{8}\pi$ oraz rzędną w punkcie $x = \frac{1}{8}\pi$.

Zadanie 12. Obliczyć pole ograniczone spiralą logarytmiczną $r = ae^{k\theta}$, gdzie $a > 0$ i $k > 0$, oraz promieniami wodzącymi o amplitudach 0 i α , gdzie $0 < \alpha < 2\pi$.

Zadanie 13.

Zbadać zbieżność całek

- (a) $\int_0^{100} \frac{x^{100}-x^{99}+x^{98}-\dots+1}{x^{100}+x^{99}+x^{98}+\dots+1} dx$
 (b) $\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(x) \cos^\beta(x) dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$
 (c) $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha}+\sin^\alpha(x)} dx \quad \alpha \geq 1$
 (d) $\int_0^1 \frac{\arctg(ax)}{x(1+x^2)} dx, \quad a \in \mathbb{R}$
 (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} \right) dx, \quad |a| < 1$
 (f) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x} dx, \quad a > -1$
 (g) $I = \int_0^\infty \frac{\tgh x}{x^\alpha+x^\beta},$ dla $\alpha > \beta$.
 (h) $I = \int_0^1 \frac{x}{\log^n x} dx$ dla $n \in \mathbb{Z}$.
 (i) $\int_1^\infty \frac{\sin x - \sinh x}{x^3} dx$
 (j) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x} dx$

Zadanie 14. Zbadać istnienie granicy:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z)$$

odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanego wzorem:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}yz^3}{x^2+y^4+z^6} & \text{dla } x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2+z^2 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 15. Zbadać ciągłość odwzorowania $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, zdefiniowanego wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} y \frac{x^2-y^2}{x^4+y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 16. Znaleźć granice iterowane i granicę podwójną w punkcie $(0,0)$ oraz zbadać ciągłość funkcji:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x^2+y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \neq 0 \\ c & \text{dla } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

