

Zadanie 1. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^3}{x^4+y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

Zadanie 2. Zbadać ciągłość oraz różniczkowalność (istnienie pochodnych kierunkowych i pochodnej silnej) funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \\ \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^4+y^4} & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zadanie 3. Zbadać istnienie drugich pochodnych funkcji w punkcie $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

Zadanie 4. Wykazać że zbiorem wartości funkcji $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) := \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}$ jest zwarty odcinek; wyznaczyć go.

Zadanie 5. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $g : \mathbf{R}_+^3 \rightarrow \mathbf{R}, g(x, y, z) = x + 4y + \frac{1}{z} + \frac{z+1}{xy}$

Zadanie 6. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji

$$f : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{\|x\|} + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i^{\infty} (x_i)^2}, a_i \text{ dane, przynajmniej jedno } a_i \text{ niezerowe.}$$

Zadanie 7. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z(x, y) \in \mathbf{R}$, zdefiniowanej niejawnie równaniem:

1. $0 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) z^3 + xyz^2 + z - 2;$
2. $0 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) z^3 + xyz^2 + 1;$
3. $0 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) z^3 + xyz^2 + z + 1 .$

Zadanie 8. Znaleźć punkty krytyczne funkcji danej niejawnie równaniem: $3z^3 - 7z \cos(x + y) + \frac{20x}{x^2+1} = 0$, zbadać typ wybranego punktu krytycznego.

Zadanie 9. Wykazać, że równania $y^2 + t^2 - 2xz = 0$ i $x^3 + y^3 + t^3 - z^3 = 0$ określają (x, z) jako funkcję (y, t) w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (1, -1, 1, 1)$ Obliczyć $\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}$ w tym punkcie.

Zadanie 10. Wyrazić wyrażenia

$$G(f) = \frac{1}{u^2 + v^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{u^2 + v^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{(uv)^2} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \quad (1)$$

$$L(f) = \frac{1}{(u^2 + v^2)} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial}{\partial u} f \right) + \frac{1}{(u^2 + v^2)} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} u \frac{\partial}{\partial v} f + \frac{1}{(uv)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f, \quad (2)$$

traktując $f = f(x(u, v, \phi), y(u, v, \phi), z(u, v, \phi))$, poprzez pochodne f po współrzędnych kartezjańskich. Związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i parabolicznymi jest następujący:

$$\left\{ (u, v, \phi) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, 2\pi) : \left(x = uv \cos(\phi), y = uv \sin(\phi), z = \frac{u^2 - v^2}{2} \right) \right\}.$$

Zadanie 11. Przedstawić (i, jeśli to możliwe, uprościć) wyrażenie różniczkowe L , jako funkcje $f(x(u, v), y(u, v))$ i jej pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, gdzie:

a)

$$L = 2u \frac{\partial g}{\partial u} - 2v \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right),$$

$$x = u + v, y = u - v, f = xyg$$

b)

$$L = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}, u = x \cos y, v = x \sin y, f = xg$$

Zadanie 12. Niech $u = u(x, y)$ będzie funkcją klasy C^2 na pewnym obszarze w $\mathbf{R}^2$, a $U = U(\varrho, \varphi)$ - jej przedstawieniem we współrzędnych biegunowych. Wyrazić wielkość $L := \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)$ we współrzędnych kartezjańskich $\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi, \\ y = \varrho \sin \varphi \end{cases}$.

Zadanie 13. W obszarze $\Omega := \mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ określamy nowe współrzędne $u := xy, v := \frac{y}{x}$. (a) Wyrazić w tych współrzędnych wyrażenie $\mathcal{L}(f) := x^2 f''_{xx} - y^2 f''_{yy}$, jeśli $f \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$. (b) (Dla chętnych) rozwiązać równanie $\mathcal{L}(f) = 0$.

Zadanie 14. Jaką powierzchnię w $\mathbf{R}^3$ opisuje parametryzacja $x = \frac{u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}, y = \frac{2uv}{1 + u^2 + v^2}, z = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}$? $u, v \in \mathbf{R}$

Zadanie 15. (Nadobowiązkowe) Niech $H := \{(x, y, z) : x \sin z - y \cos z = 0\}$ (tzw. helikoida).

- Wyznaczyć przecięcie H z płaszczyzną $\Sigma(p_0)$ styczną do H w punkcie $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$;
- Dowieść, że $H \cap \Sigma(p_0)$ zawiera dwie krzywe, przecinające się prostopadle w punkcie p_0 .

Zadanie 16. Znaleźć ekstremalne wartości funkcji $f(x, y) = (x + y)e^{-(\frac{x}{2} + 2y)}$ na zbiorze $K = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

Zadanie 17. Dla danych $a, b, c > 0$ znaleźć $x, y, z > 0$, spełniające warunek $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, dla których prostopadłościan o wierzchołkach $(\pm x, \pm y, \pm z)$ [wpisany w elipsoidę o półosiach a, b, c] ma największą możliwą objętość.

Zadanie 18. Metodą mnożników Lagrange'a znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x, y) := \frac{y}{x}$ na zbiorze $K := \{(x, y) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 2\}$; zbadać (badając drugą pochodną) typ jednego ze znalezionych punktów krytycznych.

Zadanie 19. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x, y, z) := ax + by + z$ na torusie $S := \{(x, y, z) : (\varrho - R)^2 + z^2 = r^2\}$, gdzie $\varrho := \sqrt{x^2 + y^2}$. Zakładamy tu, że $0 < r < R$ oraz $(a, b) \neq (0, 0)$.

Zadanie 20. Zmienić kolejność całkowania w całce (rysunek nie może być użyty w rozwiązaniu, lecz może je ułatwić):

$$1. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$$

$$2. \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$$

$$3. \int_{-2}^6 dx \int_{-\sqrt{12+4x-x^2}}^{\sqrt{12+4x-x^2}} f dy;$$

$$4. \int_0^\pi dx \int_{-\sin x}^{\sin x} f dy;$$

Zadanie 21. Zapisać całkę $I = \int_\Delta f(x, y, z) dx dy dz$, gdzie $\Delta \in \mathbf{R}^3$ jest czworościanem o wierzchołkach $(0, 1, 2), (1, 0, -1), (1, 3, 5), (1, 0, 2)$, w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek): (a) $\int dx \int dy \int f dz$ (b) $\int dz \int dx \int f dy$.

Zadanie 22. Niech I oznacza całkę podwójną $I = \int_K f(x, y) dx dy$; sprawdzić, że:

a) $K = \{x^2 + y^2 \leq x\}, f = x - 1|y| \Rightarrow I = \frac{1}{2}$;

- b) $K = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}, f = x^2 \sqrt{a^2 - y^2} \Rightarrow I = \frac{32a^5}{45};$
- c) $K = \{(x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2 - y^2), x \geq 0\}, f = 1 \Rightarrow I = a^2;$
- d) $K = \left\{x, y \geq 0, \sqrt{\frac{\pi}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1\right\}, f = xy \Rightarrow I = \frac{a^2 b^2}{280};$
- e) $K = \{y \geq 0, 9x \leq y^2, x^2 + y \leq 4\}, f = xy \Rightarrow I = -\frac{15}{4};$
- f) $K = \{xy \geq 1, y^2 \geq x, y \leq 2\}, f = x^2 y \Rightarrow I = \frac{251}{24};$
- g) $K = \{x^2 = y^2 \leq 2x\}, f = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Rightarrow I = \frac{8}{9}(3\pi - 4)$
- h) $K = \{x^2 + 2y^3 \leq 4xy, y \geq 0\}, f = 1 \Rightarrow I = \frac{24}{15};$
- i) $K = \{(x^2 - ax + y^2)^2 \leq a^2(x^2 + y^2)\}, f = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{2}\pi a^2;$
- j) $K = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}, f = e^{x^2 + y^2} \Rightarrow I = (e^{a^2} - 1)\pi;$
- k) $K = \{y \leq 1, x^2(2 - y) \leq y(1 - y)^2\}, f = 1 \Rightarrow I = \frac{4-\pi}{2};$
- l) $K = \{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2\}, f = x^2 y \cos(xy^2) \Rightarrow I = -\frac{\pi}{16};$
- m) $K = \{|x - y| \leq 1, y \geq 0\}, f = xe^{-y^2} \Rightarrow I = 1.$

Zadanie 23. Niech I oznacza całkę potrójną $I = \int_K f(x, y, z) dx dy dz$; sprawdzić, że:

- a) $K = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}, f(x, y, z) = (1 + x + y + z)^{-3} \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\log 2 - \frac{5}{8});$
- b) $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{60}(96\sqrt{2} - 8);$
- c) $K = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}, f(x, y, z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}abc$
- d) $K = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2), x^2 \leq y \leq x\}, f(x, y, z) = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{35};$
- e) $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}, f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{10}.$