

Źródła zadań:

- (S) Roman Sikorski, „Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych”
 (F) G. M. Fichtenholtz, „Rachunek różniczkowy i całkowy”
 (GC) śp. Grześ Cieciora
 (TR) Tomasz Radożycki, „Rozwiązujemy zadania z analizy matematycznej”
 (KW) W. Krywicki, L. Włodarski, „Analiza matematyczna w zadaniach: t.II.
 (GJ) R.S. Guter. A.R. Janpolski „Równania różniczkowe“

1. Wykład, 2.03

Funkcje wielu zmiennych. Ciągłość w $\mathbb{R}^N$. Różniczkowalność w $\mathbb{R}^N$ - wstęp. Pochodna cząstkowa. Pochodna kierunkowa. Norma. Pochodna mocna.

Ćwiczenia:

- 1.1 (K15.66-15.83) Policzyc całki: $\int x^4(1+x)^3 dx$, $\int x^2 e^x dx$, $\int x^4 e^{2x} dx$, $\int x \cos x dx$, $\int x^2 \cos x dx$, $\int e^x \cos x dx$, $\int \sqrt{x} \ln x dx$, $\int \ln x dx$, $\int x \ln x dx$, $\int x^n \ln x dx$.
- 1.2 ■ Policzyc całki: $\int e^{3x^2} x dx$, $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} dx$, $\int \frac{\log x}{x} dx$
- 1.3 ■ Policzyc całki: $\int \sin^2 x dx$, $\int \sqrt{x^2+1} dx$, $\int \arctg x dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$ (Wstawić $a=0$ ($b=0$). Odgadnąć wzór $\int e^{ax} \sin bx dx$).
- 1.4 ■ Znaleźć związki rekurencyjne: $I_n = \int x^n e^{ax} dx$,
- 1.5 ■ Omówić rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste.
- 1.6 ■ Znaleźć funkcję pierwotną do funkcji postaci $\frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 1.7 ■ (K16.10) Policzyc całki: $\int \frac{dx}{2x^2+9x-5}$, $\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2} dx$, $\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1} dx$.
- 1.8 (K16.15) Policzyc całkę: $\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)} dx$.
- 1.9 (K16.16) Policzyc całkę (z trudem hamując entuzjazm): $\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} dx$.
- 1.10 (K19.2) Obliczyć pole ograniczone łukiem paraboli $y^2=2x$ oraz prostą $x=8$.
- 1.11 $\int$ (K19.37) Obliczyć pole zawarte między parabolami $y=x^2$ i $y^2=x$.
- 1.12 (K19.51) Obliczyć pole ograniczone funkcją $y(x)=x \sin(4x)$, $x \in [0, \frac{1}{8}\pi]$, osią OX oraz prostą $x=\frac{1}{8}\pi$.
- 1.13 (K15.66-15.83) Policzyc całki: $\int x^4(1+x)^3 dx$, $\int x^2 e^x dx$, $\int x^4 e^{2x} dx$, $\int x \cos x dx$, $\int x^2 \cos x dx$, $\int e^x \cos x dx$, $\int \sqrt{x} \ln x dx$, $\int \ln x dx$, $\int x \ln x dx$, $\int x^n \ln x dx$.
- 1.14 (GC) Całkując przez części znaleźć wzór rekurencyjny dla całek $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $\int x^\alpha \ln^n x dx$
- 1.15 (FII,314) Zamieniając zmienne pokazać, że jeżeli $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, to $\int_0^\pi x \varphi(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \varphi(\sin x) dx$. Odpowiedź: podstawić $x = \pi - t$.
- 1.16 (GC) Pokazać, że $\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{(1+\cos^2 x)^2} = \frac{1}{8}\pi(\pi+2)$. Odpowiedź: skorzystać z poprzedniego zadania.
- 1.17 (I) Policzyc pochodne funkcji: $f(x) = \int_0^{x^2} \sin t dt$, $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \tg s ds$.

- 1.18 (K19.2) Obliczyć pole ograniczone łukiem paraboli $y^2 = 2x$ oraz prostą $x = 8$.
- 1.19 (K19.37) Obliczyć pole zawarte między parabolami $y = x^2$ i $y^2 = x$.
- 1.20 (K19.51) Obliczyć pole ograniczone funkcją $y(x) = x \sin(4x)$, $x \in [0, \frac{1}{8}\pi]$, osią OX oraz prostą $x = \frac{1}{8}\pi$.
- 1.21 (K15.66-15.83) Policzyc całki: $\int x^4(1+x)^3 dx$, $\int x^2 e^x dx$, $\int x^4 e^{2x} dx$, $\int x \cos x dx$, $\int x^2 \cos x dx$, $\int e^x \cos x dx$, $\int \sqrt{x} \ln x dx$, $\int \ln x dx$, $\int x \ln x dx$, $\int x^n \ln x dx$.
- 1.22 (GC) Całkując przez części znaleźć wzór rekurencyjny dla całek $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $\int x^\alpha \ln^n x dx$
- 1.23 (FII,314) Zamieniając zmienne pokazać, że jeżeli $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła, to $\int_0^\pi x \varphi(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \varphi(\sin x) dx$. Odpowiedź: podstawić $x = \pi - t$.
- 1.24 (GC) Pokazać, że $\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{(1+\cos^2 x)^2} = \frac{1}{8}\pi(\pi + 2)$. Odpowiedź: skorzystać z poprzedniego zadania.
- 1.25 (I) Policzyc pochodne funkcji: $f(x) = \int_0^{x^2} \sin t dt$, $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \operatorname{tg} s ds$.

2. Wykład, 5.03

Różniczkowalność a pochodne kierunkowe. Ciągłość normy, norma operatora - przykłady.

Ćwiczenia:

- 2.1 (GC, cs fn) (Jeżeli chcemy coś powtórzyć). Korzystając ze wzorów: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ oraz przedstawiając funkcje podcałkową w postaci sumy szeregu funkcyjnego wyprowadzić wzory:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}$, b) $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}$. (Wszystkie niezbędne twierdzenia związane ze zbieżnością jednostajną ciągu funkcyjnego pojawiły się w poprzednim semestrze).

- 2.2 (TR, 6.3) Załóżmy, że w przestrzeni $X := [1, +\infty[$ wprowadzona została metryka:

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \frac{1}{xy}, & x \neq y. \end{cases} \quad \text{Zbadać, czy zbiór } A = [2, 3[\text{ jest otwarty bądź domknięty.}$$

- 2.3 Zbadać ciągłość funkcji: a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$,

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 2.4 (TR, 6.1) Zbadać, czy zbiory: $A := \cup_{n=1}^\infty [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$, $B := \cap_{n=1}^\infty]-\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}]$ są otwarte bądź domknięte.

- 2.5 Zbadać czy funkcja $f(x, y) := x^2 + 2y + \ln(x - y)$ jest ciągła na zbiorze: $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$.

- 2.6 (TR, 6.2) Zbadać czy zbiór $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x^2 + 2y + \ln(x - y) < 4, x > y\}$ jest otwarty czy bądź domknięty. (Zauważamy, że zbiór A to po prostu $f^{-1}(]0, 4[)$, gdzie f - funkcja z poprzedniego zadania).

- 2.7 (TR, 6.3) Zbadać, dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiór $A := \{x \in \mathbb{R} | x = \alpha^n, n \in \mathbb{N}_+\}$ jest zwarty.

- 2.8 (TR, 6.4) W zależności od wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ zbadać zwartość zbioru: $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax^2 + by^2 = 1\}$.

3. Wykład 9.03

Pochodna funkcji złożonej. Macierz pochodnych. Pochodne mieszane.

Ćwiczenia:

3.1 Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji: $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$

3.2 Niech $z = f(x^2 - y^2)$. Udowodnić, że spełniona jest zależność: $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

3.3 Zbadać różniczkowalność funkcji: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3.4 Zbadać różniczkowalność funkcji: $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

3.5 Zbadać różniczkowalność funkcji: $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

3.6 Sprawdzić, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie Laplace'a: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

jeżeli: a) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, b) $f(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$, c) $f(x, y) = \sin x \cosh y$

3.7 (GC) Sprawdzić, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełnia równanie Laplace'a $\Delta f = 0$, a $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy C^2 i spełniają równania $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, to funkcja złożona $\hat{f} := f \circ (u, v)$ też spełnia równanie Laplace'a.

3.8 (GC) W przestrzeni $V := C([0, 1], \mathbb{R})$ określmy normę wzorem $\|v\| := \sup_{t \in [0, 1]} |v(t)|$. Znaleźć wzór na [pochodną $\nabla_h F(v)$ i zbadać różniczkowalność odwzorowania $F : V \rightarrow V$ zdefiniowanego wzorem: $(F(v))(t) := \int_0^t v^2 := \int_0^t (v(s))^2 ds$

3.9 (F, I, 355) Niech $y := f(x + at) + g(x - at)$, a - dowolna stała zaś f, g - klasy C^2 . Wykazać, że y spełnia równanie $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

3.10 (S, 137) Policzyc pochodną kierunkową funkcji: $\varphi(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$
w dowolnym punkcie $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ w kierunku wektora $h = [1, 1, \dots, 1]$

4. Wykład 12.03

Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych. Ekstrema i punkty stacjonarne.

Ćwiczenia:

4.1 (GC) Zapisać równanie $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ w nowych zmiennych: $\eta = x - vt$, $\xi = x + vt$.
(może studentom uda się odgadnąć rozwiązanie i podać interpretację fizyczną?)

4.2 (GC) Niech $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Sprawdzić, że $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \exists_g \in C^1([0, \infty[) : f(x, y) = g(x^2 + y^2)$. ($w \Leftarrow$ podstawiamy, $w \Rightarrow$ przechodzimy do biegunowego)

4.3 (GC) Zapisać operator: $L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ we współrzędnych biegunowych.

4.4 (GC) W obszarze $\Omega := \mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. określamy nowe współrzędne: $u := \sqrt{xy}$, $v := \frac{y}{x}$. Wyrazić w tych współrzędnych wyrażenie $L(f) := x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ jeśli $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. (wychodzi $-2u^2 v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} (\frac{1}{u} F)$). Może komuś uda się odgadnąć rozwiązanie?)

5. Wykład 16.03

Własności pochodnej a odwracalność. Norma operatora liniowego cd. Zasada Banacha. Odwzorowania ściągające. Gdyby był czas: lemat potrzebny przy dowodzie twierdzenia z wykładu 10.

Ćwiczenia:

5.1 (F) Znaleźć największą wartość funkcji $u(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ w trójkącie ograniczonym osią x , osią y i prostą $x + y = 2\pi$.

5.2 (GC) Znaleźć ekstremalne wartości funkcji $f(x, y) = (x + y)e^{-(\frac{x}{2} + 2y)}$ na zbiorze $K := \{(x, y) : x, y \geq 0, \quad x + y \leq 1\}$.

5.3 (F, GC) Dla danych $a, b, c > 0$ znaleźć $x, y, z > 0$ spełniające warunek: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, dla których prostopadłościan o wierzchołkach $(\pm x, \pm y, \pm z)$ [wpisany w elipsoidę o półosiach a, b, c] ma największą możliwą objętość.

5.4 (F, S) Wśród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć taki, dla którego bryła obrotowa powstała przez obrót dookoła jednego z boków ma największą objętość

6. Wykład 19.03

Twierdzenie o lokalnej odwracalności.

Ćwiczenia:

6.1 (GC) Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x, y) := \sin(x + y) - \sin x - \sin y$. (czyli punkty siodłowe też)

6.2 Znaleźć ekstrema funkcji: $p(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$.

6.3 Znaleźć odległość punktu $A = (0, 0, 0)$ od powierzchni określonej równaniem $y = xz - 3$.

6.4 Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określonej wzorem: $f(x, y) := \frac{xy(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$.

7. Wykład 23.03

Dokończenie tw. o lokalnej odwracalności. Funkcje uwikłane - wstęp.

Ćwiczenia:

7.1 (GC) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $z : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej w obszarze $\mathcal{O} := \{(x, y) : x, y > 0\}$ niejawnie równaniem: $F(x, y, z) := (x+z)(y+z) \left(1 + \frac{z}{xy}\right) = 8$

7.2 (GC) Znaleźć punkty krytyczne funkcji $(x, y) \rightarrow z(x, y)$ opisanej niejawnie równaniem $6z^3 - 7(x^3 - 3x)z + (2x + y)^2 = 20$

7.3 (F) Rozważmy funkcję $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $H(x, y, z, t) := [x + y + z + t - 10, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 30, x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 100]$, Warunek $H = 0$ określa y, z, t jako funkcje zmiennej x . Znaleźć $y'(x)$ w punkcie $(1, 2, 3, 4)$

8. Wykład 26.03

Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Ekstrema związane – wstęp.

Ćwiczenia:

8.1 Parametryzacja: omówić parametryzację walca, sfery, torusa, spirali logarytmicznej, jakieś linii śrubowej w $\mathbb{R}^3$ ew. wstęgi Moebiusa (materiały Grzesia).

8.2 Niech $M(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$. Opisać i zinterpretować geometrycznie zbiór: $T := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad M'(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \right\}$

8.3 Wprowadzić „nieformalnie” pojęcie przestrzeni stycznej (pełna definicja pojawi się później na wykładzie) A potem: (GC) znaleźć przekrój torusa $S := \{ \mid : (\rho - b)^2 + z^2 = a^2 \}$, $0 < a < b$ płaszczyzną styczną w punkcie $\mid_0 = (b - a, 0, 0)$.

9. Wykład 30.03

Ekstrema związane. Mnożniki Lagrange’a.

Ćwiczenia:

9.1 (GC) Zbadać przy pomocy mnożników Lagrange’a punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = \frac{x}{y}$ na zbiorze $K := \{(x, y) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 2\}$, zbadać (badając drugą pochodną) typ jednego ze znalezionych punktów krytycznych. *(Ze względów dydaktycznych staramy się badać znak formy kwadratowej związanej z drugą pochodną przy pomocy wektorów stycznych, mimo, że metoda wyznacznikowa czasami działa).*

9.2 (GC) Znaleźć minimum i maksimum funkcji $f(x, y, z) := \frac{x+y}{z+1}$ na zbiorze $K := \{(x, y, z) : z \geq 0, \sqrt{z} + \sqrt[4]{x^2 + y^2} \leq 1\}$.

9.3 (GC) Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) := x_1x_2 + x_3x_4$ na zbiorze $S := \{x \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1, x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4)\}$.

10. Wykład 31.03

REZERWA - z zaległości mogą być ciągi funkcyjne lub całki niewłaściwe

Ćwiczenia:

10.1 REZERWA

11. Wykład 09.04

Równania różniczkowe. Problem Cauchy. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań dla równań I rzędu.

Ćwiczenia:

11.1 Dokończenie zaległych zadań na ekstrema

12. Wykład 13.04

Dokończenie twierdzenia o jednoznaczności. Odwzorowania zwięzające - przykłady.

Ćwiczenia:

12.1 REZERWA

13. Wykład 16.04

Równania liniowe wyższych rzędów. Układy równań liniowych, jednorodnych, niejednorodnych. Jednoznaczność. Rezolwenta. Rezolwenta. Równania o stałych współczynnikach.

Ćwiczenia: (Równania o zmiennych rozdzielonych)

13.1 (KW, 7.1) Rozwiązać równanie: $x^2 \frac{dx}{dy} = \sin \frac{1}{x}$. Znaleźć rozwiązanie przechodzące przez punkt (x_0, y_0) .

13.2 (GC) Rozwiązać równanie: $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin 2y}{2(1-2e^{-x})}$.

13.3 (KW, 7.73) Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt $(2, 3)$, takiej, że każdy odcinek stycznej do krzywej zawarty między osiami układu współrzędnych jest dzielony na połowę przez punkt styczności.

13.4 (KW, 7.74) Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt $(2, 0)$, takiej, że odcinek każdej stycznej do tej krzywej zawarty między punktem styczności i punktem przecięcia z osią OY jest wielkością stałą i wynosi 2.

13.5 (KW, 7.11) Do zacisków źródła o stałym napięciu U w chwili $t = 0$ zostaje podłączony obwód zawierający kondensator o pojemności C i opornik o oporze R (elementy połączono szeregowo). Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $I(t)$ dla danego obwodu włączonego do źródła. *Drugie prawo Kirchhoffa:* $U = RI - \frac{Q}{C}$.

13.6 (KW, 7.78) Rurka o stałym przekroju S i długości l , szczelnie zamknięta, wypełniona jest gazem o ciśnieniu p . Wyznaczyć przebieg zmian ciśnienia wzdłuż rurki, jeżeli zamocowana prostopadle do osi obrotu (na jednym końcu) będzie się obracała w płaszczyźnie poziomej ze stałą prędkością kątową ω .

14. Wykład 20.04

Funkcje od macierzy. Wartości własne. Wielomian charakterystyczny. Równania liniowe o stałych współczynnikach. Struktura rozwiązań. Przykłady - układ równań I-go rzędu, oscylator harmoniczny ze wszystkim.

Ćwiczenia:

- 14.1 (GC) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania: a) $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$, b) $y' = \frac{y}{x} \ln \left| \frac{y}{x} \right|$ (podstawiamy $y = u(x)x$)
- 14.2 (KW,11.1) Rozwiązać równanie: $y' + y + y^2 \sin(x) = 0$ (Bernoulli $z = y^{1-n}, n = 2$)
- 14.3 (GC) Znaleźć rozwiązanie ogólne $x = x(t) > 0$ równania $t\dot{x} - 4x - t^2\sqrt{x} = 0$
- 14.4 (GC) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania: $3xy^2y' = 2y^3 + x^3$
- 14.5 (GC) Rozwiązać równanie: $xy'' = x^2 + y'$ $y' = v(x)$
- 14.6 (GC) $y'' = \frac{1}{a}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$ (krzywa łańcuchowa)

15. Wykład 23.04

Przykłady - układy równań I-go rzędu. Uźmiennianie stałej, niejednorodności.

Ćwiczenia: Równania liniowe o stałych współczynnikach. Wronskian. Baza rozwiązań. Tw. Liouville'a.

- 15.1 (KW, 13.1) Rozwiązać równanie: $2y'' - 5y' - 3y = 0$
- 15.2 (KW 13.3) Rozwiązać równanie: $4y'' + 12y' + 9y = 0$
- 15.3 (KW 13.4) Rozwiązać równanie: $y'' + 4y' + 13y = 0$
- 15.4 (KW 13.38) W pewnym ruchu prostoliniowym przyspieszenie $\ddot{x}$ jest proporcjonalne do prędkości: $a = 2v$. Wyznaczyć równanie tego ruchu.
- 15.5 (GC) Znaleźć rozwiązanie ogólne dla $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ równania: $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = e^{t\frac{\sin t}{\cos t}}$
- 15.6 (GC) znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin(e^{-t}) + te^t$

16. Wykład 27.04

Tw. Liouville'a – dokończenie, Wronskian – dokończenie, uźmiennianie stałej – dokończenie.

Ćwiczenia:

- 16.1 Znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy: $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + 2y, \dot{z} = x + 2z - w, \dot{w} = x + w, x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 1, w(0) = 0$.
- 16.2 Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań:
 $\dot{x} = 5x - 2y + 4z, \dot{y} = x + y + z + e^t, \dot{z} = -4x + 3y - 3z$.
- 16.3 (GJ, 267) Substancja A ulega rozpadowi na dwie substancje: P i Q . Prędkość tworzenia się każdej z nich jest proporcjonalna do ilości nierozłożonej substancji A (współczynniki proporcjonalności: k_1 i k_2). Znaleźć zależność ilości x i y substancji P i Q od czasu t , jeżeli po upływie godziny od chwili rozpoczęcia procesu x i y są odpowiednio równe $\frac{1}{8}a$ i $\frac{3}{8}a$, gdzie a jest początkową ilością substancji A .
- 16.4 (GJ) (gdyby było za dużo czasu:) Jaki kształt powinna mieć powierzchnia zwierciadła w reflektorze obrotowym, aby wszystkie promienie wychodzące ze źródła światła umieszczonego w punkcie O na osi obrotu odbijały się od zwierciadła równolegle do tej osi.

17. Wykład 30.04

Zbiór miary zero w sensie Lebesgue'a. Własności zbiorów miary zero (funkcje ciągle, pochodne). Kostki w $\mathbb{R}^N$. Podziały. Całki na $\mathbb{R}^N$ -wstęp.

Ćwiczenia:

- 17.1 (GC) Rozwiązać równanie różniczkowe $\frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{dx}{dt} + 4x = 2e^{-2t} \cos^2 \frac{t}{2}$
- 17.2 (GC) Dla $t > 0$ znaleźć rozwiązanie ogólne $x = x(t)$ równania $t^2\ddot{x} + 2\dot{x} + \frac{1-2t}{t^2}x = \frac{1}{t^3}$ znając RSRJ: $x_1(t) = e^{\frac{1}{t}}$.
- 17.3 Rozwiązać równanie: $(2t - t^2)\ddot{x} + (t^2 - 2)\dot{x} - 2(t - 1)x = t^2$ znajdując najpierw jedno RSRJ w postaci wielomianu.

18. Wykład 4.05

Całki: dolna i górna. Zwartość. Definicja pokryciowa. Całkowalność w sensie Riemanna.

Ćwiczenia:

18.1 Dokończenie zadań z równań różniczkowych.

19. Wykład 11.05

Twierdzenie Lebesgue'a. Twierdzenie Fubinięgo.

Ćwiczenia:

- 19.1 (F) Obliczyć całkę $\iint_P \frac{ds}{(x+y)^2}$, gdzie $P = [3, 4] \times [1, 2]$.
- 19.2 (F) Obliczyć całkę $\iint_P \frac{y ds}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, gdzie $P = [0, 1] \times [0, 1]$ (*Warto przedyskutować oba warianty kolejności całkowania*).
- 19.3 (KW, 4.2) Obliczyć całkę podwójną: $\iint_D (2x + y - 1) ds$, gdzie D jest obszarem trójkąta o wierzchołkach w punktach $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(5, 5)$ (*Warto przedyskutować oba warianty kolejności całkowania*).
- 19.4 (F, III; 114) Dowieść, że $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 y^y dy$.
- 19.5 (F) Obliczyć całkę: $K = \iint_A (x^2 + y) ds$, A jest obszarem ograniczonym dwiema parabolami: $y = x^2$ i $y^2 = x$.
- 19.6 (F) Zmienić porządek całkowania w całkach iterowanych:

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy, \quad \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dy,$$

20. Wykład 14.05

Twierdzenie o zamianie zmiennych. Przykłady dla prostych odwzorowań z $\mathbb{R}^N$ w $\mathbb{R}^N$.

Ćwiczenia:

- 20.1 (F, 262) Obliczyć całkę $I = \iiint \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ po czworościanie V ograniczonym płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
- 20.2 (F, 327) Znaleźć objętość $|T_n|$ n -wymiarowego sympleksu:
 $T_n := \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq h, h > 0\}$
- 20.3 (GC) Odwracając kolejność całkowania wykazać, że:

$$\int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 = \int_a^b f(x) \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} dx$$

21. Wykład 18.05

REZERWA

Ćwiczenia: (zamiana zmiennych+Jakobian)

- 21.1 (F, 160) Obliczyć pole ograniczone krzywą: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
- 21.2 (F, 164) Znaleźć pole figury ograniczonej parabolami:
 $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$, gdzie $0 < p < q$ oraz $0 < a < b$
(wprowadzić odpowiednie współrzędne krzywoliniowe w postaci dwóch rodzin parabol, jacobian wynosi $-\frac{1}{3}$)

21.3 (F) Znaleźć pole asteroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

21.4 (F, 301) Znaleźć masę i określić położenie środka ciężkości kuli: $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2az)$ przy rozkładzie mas: $\rho(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

22. Wykład 21.05

Mapa i parametryzacja. Rozmaitość. Krzywe na rozmaitości. Wektor styczny.

Ćwiczenia: (zamiana zmiennych+Jakobian)

22.1 Obliczyć objętość bryły uzyskanej z przecięcia kuli o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ walcem o promieniu r o środku w punkcie $(\frac{1}{2}r, 0, 0)$. (*Jest to tzw. bryła Vivianiego*)

22.2 (GC) Dwa walce o jednakowym promieniu $a > 0$ (i nieskończonej objętości) przenikają się wzajemnie tak, że ich osie symetrii obrotowej przecinają się pod kątem $\varphi \in]0, \pi[$. Oblicz objętość wspólnej części obu walców.

22.3 (K, 5.36) Znaleźć moment bezwładności stożka obrotowego o wysokości h , promieniu podstawy a i gęstości ρ względem średnicy podstawy.

23. Wykład 25.05

Przestrzeń styczna. Przestrzeń różniczkowa. Jednoforma.

Ćwiczenia:

23.1 dokończenie całek

24. Wykład 28.05

Iloczyn zewnętrzny. k -formy. Własności iloczynu zewnętrznego. Pochodna zewnętrzna.

Ćwiczenia:

24.1 Dokończenie całek

25. Wykład 1.06

Pochodna zewnętrzna cd. Transport formy. Pchnięcia i cofnięcia. Formy w $\mathbb{R}^3$.

Ćwiczenia:

25.1 Czy zbiór: $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 \vee \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$ może być rozmaitością?

25.2 Czy zbiór: $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z^2\}$ jest rozmaitością? Znaleźć bazę dla $T_{(1,0,1)}M$.

25.3 Wyrazić we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych. formy z $\mathbb{R}^3$: $\sigma_1 = xdy - ydx$, $\sigma_2 = \frac{xzdx + yzdy - (x^2 + y^2)dz}{x^2 + y^2}$

25.4 $\Psi^*\omega$, jeżeli $\Psi : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + 2 \in \mathbb{R}$, $\omega(y) = (1 + y^2)dy$.

25.5 Omówić pojęcie iloczynu zewnętrznego 1-form w działaniu na wektory tzn. wyrażenia typu $\left\langle xdy \wedge ydy, y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$

26. Wykład 8.06

Bazy unormowane i nieunormowane. Gwiazdka Hodge'a Gradient, rotacja, dywergencja, laplasjan.

Ćwiczenia:

26.1 Mając dane 1-formy $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$:

$\omega_1 = 2x^2dx + (x+y)dy$, $\omega_2 = -xdx + (x-2y)dy$ $\omega_3 = x^3dx + yzdy - (x^2 + y^2 + z^2)dz$,
 $\omega_4 = y^2zdx - xzdy + (2x+1)dz$. Oblicz: $\omega_1 \wedge \omega_2, \omega_3 \wedge \omega_4$, różniczki zewnętrzne $d\omega_i$,
sprawdź czy $dd\omega_i = 0$

- 26.2 Niech $f = x^2y^3z - 2xyz^2$, $g = x^2 + y^2 - 3z^4$. Znaleźć $\text{grad}(f)$ korzystając z odpowiedniości 0-form i funkcji.
- 26.3 Znajdź rotację poniższych wektorów korzystając z odpowiedniości wektorów i 1-form:
 $A = (2x^2, x + y, 0)$, $B = (x^2 + y^2, x - y^2, 3x)$, $C = (y^2z, -xz, 2x + 1)$,
 $D = (y^2z, x + z^2, x^2 - y)$.
- 26.4 Znajdź dywergencję poniższych wektorów korzystając z odpowiedniości wektorów i 2-form:
 $A = (0, 0, x^2 - y^2)$, $B = (x^2 + y^2, x - y^2, 3x)$, $C = (x^2yz, -2xyz, xyz^3)$.
- 26.5 2. Znajdź $\Psi^*\omega$, jeżeli (a) $\Psi : \mathbb{R} \ni x \rightarrow (x, x^3, \cos x) \in \mathbb{R}^3$,
 $\omega(y_1, y_2, y_3) = y_1 \exp(-y_2 - y_3) dy_1 \wedge dy_3$; (b) $\Psi : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \rightarrow (1, 2x_1x_2, x_1x_2) \in \mathbb{R}^3$,
 $\omega(y_1, y_2, y_3) = y_2 dy_2 \wedge dy_3 + dy_1 \wedge dy_3$.

27. Wykład 11.06

Gradient, rotacja, dywergencja, laplasjan cd. Iloczyn wewnętrzny.

Ćwiczenia:

- 27.1 Wyprowadzić wzór na gradient, rotację i dywergencję (laplasjan) przy pomocy form różniczkowych

28. Wykład ????

Orientacja. Całkowanie form różniczkowych. Całki krzywoliniowe.

Ćwiczenia:

- 28.1 Policz $\int_C \phi$ dla podanych parametryzacji krzywych i form:

$$C := \{(2t + 1, t^2), \quad 1 \leq t \leq 2\}, \quad \phi = xdx + 4ydy.$$

$$C := \{(\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}\}, \quad \phi = 6xy^2dx$$

$$C := \{(12x^3 - 12x, x), \quad 0 \leq x \leq 2\}, \quad \phi = 5xydx + xdy.$$

$$C := \{(e^{x^3}, x), \quad -1 \leq x \leq 1\}, \quad \phi = x^2ydx.$$

$$C := \{(t^3 - t^2 + t + 1, t^3 - 2t^2 + 2t + 1), \quad 0 \leq t \leq 1\}, \quad \phi = 2xydx + x^2dy, \text{ wybrać prostszą parametryzację krzywej } C.$$

- 28.2 Znajdź całkę z formy po zadanej objętości $\int_B \phi$:

B jest sześcianem o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$,

$(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ oraz $\phi = (1 + 2x - 2y)dx \wedge dy \wedge dz$

B częścią kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ dla $x, y, z \geq 0$ oraz $\phi = xydx \wedge dy \wedge dz$.

B jest bryłą ograniczoną powierzchniami $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$, $z = -1$ oraz $\phi = 5y^2dx \wedge dy \wedge dz$.

29. Wykład ????

Orientacja. Całkowanie form różniczkowych.

Ćwiczenia:

- 29.1 Wyprowadzić wzór na gradient, rotację i dywergencję we współrzędnych bisferycz-

$$\text{nych } (\sigma, \tau, \phi), \quad g_{ij} = \frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \sigma \end{bmatrix}$$

- 29.2 Policzyc całkę z formy $\alpha = xdy \wedge dz - y^2dz \wedge dx + 2xzdz \wedge dy$ po brzegu sześcianu
 $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ oraz z formy $\beta = d\alpha$ po M .

30. Wykład ?????

Tw. Stokesa.

Ćwiczenia:

- 30.1 Sprawdzić tw. Stokesa dla: a) $\omega = x + y, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$,
b) $\omega = 2xdy + dx, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - 3| \leq 3, |y| \leq 2, x^2 + 4y^3 \geq 4\}$,
c) $\omega = x^2dy + y^2dx, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.