

Zad. 2.0. Obliczyć granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \frac{1}{n} = \int_0^1 x^{\alpha} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \frac{1}{n} = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Zad. 2.1. Obliczyć całki:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+a^2 x^2} dx, \quad a > 0 \\ & \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-a|x|} dx, \quad a > 0 \\ & \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0 \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x} dx \\ & \int_0^1 x^n (1-x)^m dx, \quad n, m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zad. 2.2. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx$$

(Użyć podstawienia $x = \pi - t$ by wyeliminować x z licznika).

Zad. 2.3. Znaleźć pole powierzchni ograniczonej hiperbolą o równaniu $x^2 - y^2 = 1$, prostą przechodzącą przez punkty $(0, 0)$ i $(\cosh a, \sinh a)$, oraz oś X .

Zad. 2.3. Znaleźć pole powierzchni ograniczonej krzywą o równaniu

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$$

Zad. 2.4. Niech

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n \varphi d\varphi$$

Udowodnić, że dla $n \geq 2$ zachodzi $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Obliczyć I_n dla $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 2.5. Za pomocą odpowiednich podstawień wyrazić całki postaci

$$\int_0^\pi \sin^n \varphi \cos^m \varphi d\varphi$$

przez całki postaci

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Zad. 2.6. Za pomocą odpowiednich podstawień wyrazić całki postaci

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{(1+t^2)^m} dt$$

przez całki postaci

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$