Zad. 3.1. Niech $0 < a < b$, $0 < p < q$. Znaleźć pole figury ograniczonej parabolami o równaniach $ay = x^2$, $by = x^2$, $px = y^2$, $qx = y^2$. (Odp.: $\frac{1}{3}(b-a)(q-p)$)

Zad. 3.2. Zbadać zbieżność całek

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x, \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^\beta \mathrm{d}x$$

$$\int_1^\infty x^\alpha (\ln x)^\beta \mathrm{d}x$$

(Dwa ostatnie przykłady można odpowiednim podstawieniem zamienić na całkę gamma.)

Zad. 3.3. Udowodnić zbieżność (w sensie Riemanna) całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

i rozbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$$

Zad. 3.4. Zbadać zbieżność całki

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

(Jest rozbieżna; należy oszacować wkład jaki do całki dają otoczenia punktów $x = n\pi$, i pokazać, ze te wkłady można oszacować od dołu przez $\frac{C}{\sqrt{n}}$.)

Zad. 3.5. Pokazać, że

$$\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}$$

(Użyć $\frac{1}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-nx}$, $\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nx}$, $x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$.)

Zad. 3.6. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x=y=0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x=y=0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} x\ln(x^2+y^2) & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x=y=0 \end{cases}$$

Zad. 3.7. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

$$f(x_1,\ldots x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}$$

$$f(x,y,z) = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Zad. 3.8. Znaleźć pochodne cząstkowe, zbadać ciągłość pochodnych cząstkowych, i zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x=y=0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{xy} & \text{dla } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x=0 \vee y=0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$$