

Zad. 4.1. Obliczyć pochodne kierunkowe funkcji i pokazać, że są one mocnymi pochodnymi (norma w przestrzeniach jest normą euklidesową lub normą supremum):

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u) = u^T A u$, gdzie A jest ustaloną macierzą
- $L : C^\infty([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$, $L(u) = \int_0^1 ((u'(x))^2 - u(x)^2) dx$
- $f : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $(f(u))(t) = \int_0^t (u(x)^2) dx$
- $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = \text{tr}(A^2) - (\text{tr} A)^2$

Zad. 4.2. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają równanie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

- $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
- $f(x, y) = \sin x \cosh y$

Zad. 4.3. Pokazać, że funkcja $f(x, t) = u(x + at) + v(x - at)$, gdzie $u, v \in C^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$.

Zad. 4.4. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x, y)$ spełnia równanie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, to funkcja $g(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ spełnia równanie $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0$

Zad. 4.5. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość tej funkcji na trójkącie ograniczonym osią OX, osią OY, i prostą $x + y = 2\pi$.

Zad. 4.6. Znaleźć odległość punktu $(0, 0, 0)$ od powierzchni w $\mathbb{R}^3$ o równaniu $z = xy - 3$ (metryka euklidesowa).

Zad. 4.7. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \dots + \frac{n}{x_n}$.

Zad. 4.8. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{1 + |\vec{x}|^2}$ ($\vec{a}$: ustalony wektor, standardowy iloczyn skalarny).