

**Zad. 5.1.** Wyprowadzić wzór na laplasjan we współrzędnych sferycznych w trzech wymiarach.

**Zad. 5.2.** Używając współrzędnych biegunowych pokazać, że funkcja  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  spełnia równanie

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja  $g \in C^1(]0, \infty[)$  taka, że  $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ .

**Zad. 5.3.** Niech  $f(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^\alpha}$ . Znaleźć, dla jakiej wartości  $\alpha$  funkcja  $f$  spełnia równanie Laplace'a w przestrzeni  $n$ -wymiarowej.

**Zad. 5.4.** Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji  $z(x, y)$  zadanej niejawnie równaniem

$$6z^3 - 7(x^3 - 3x)z + (2x + y)^2 - 20 = 0$$

**Zad. 5.5.** Niech  $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $H(x, y, z, t) = (x + y + z + t - 10, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 30, x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 100)$ . Niech funkcje  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  będą takie, że  $x(1) = 2$ ,  $y(1) = 3$ ,  $z(1) = 4$  oraz  $H(x(t), y(t), z(t), t) = 0$ . Znaleźć  $x'(1)$ ,  $y'(1)$  oraz  $z'(1)$ .

**Zad. 5.6.** Omówić parametryzację walca, sfery, stożka, torusa, ogólnej powierzchni obrotowej, ewntualnie powierzchni śrubowej i wstęgi Möbiusa.

**Zad. 5.7.** Omówić parametryzację płaszczyzny stycznej do powierzchni zadanej parametryzacją. Znaleźć parametryzację krzywej będącej przekrojem torusa  $(\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 = a^2$  płaszczyzną styczną do niego w punkcie  $(b - a, 0, 0)$ .