Zad. 7.1. Zapisać w postaci całki iterowanej całkę $\int_D f(\vec{x})\mathrm{d}^n x$, gdzie
a. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
b. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 1\}$
c. $D \subset \mathbb{R}^3$ jest obszarem ograniczonym płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$
d. $D = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : |x| + |y| \leq |z| + |t| \leq 1\}$

Zad. 7.2. Zamienić kolejność całkowania w całkach iterowanych
a. $\int_0^1 (\int_{2x}^{3x} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$
b. $\int_0^1 (\int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$

Zad. 7.3. Obliczyć całki
a. $\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdzie $D = [3,4] \times [1,2]$
b. $\iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdzie $D = [0,1] \times [0,1]$
c. $\iint_D (2x + y - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $(1,1)$, $(5,3)$ i $(5,5)$
d. $\iiint_D \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^3$ jest obszarem ograniczonym płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$

Zad. 7.4. Znaleźć objętość n-wymiarowego symplexu:
$T_n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1, \dots x_n \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$

Zad. 7.5. Zamieniając kolejność całkowania, pokazać, że
a. $\int_a^b \big(\int_a^{x_n} \dots \big(\int_a^{x_3} \big(\int_a^{x_2} f(x_1)\mathrm{d}x_1 \big)\mathrm{d}x_2 \big) \dots \mathrm{d}x_{n-1} \big)\mathrm{d}x_n = \int_a^b f(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x$

Zad. 7.6. Wprowadzając współrzędne biegunowe, obliczyć pole obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą o równaniu $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Zad. 7.7. Wprowadzając współrzędne $t = x^2/y$, $u = y^2/x$, obliczyć pole obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego parabolami $ay = x^2$, $by = x^2$, $px = y^2$, $qx = y^2$, gdzie $0 < a < b$, $0 < p < q$.

Zad. 7.8. Znaleźć położenie środka masy jednorodnej czaszy kulistej $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \leq a\}$, gdzie $|a| < R$.

Zad. 7.9. Znaleźć masę i położenie środka masy kuli $x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2$ o gęstości $\rho(x,y,z) = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.