

Seria 1.: Zadania z równań różniczkowych

1.1. Znajdź rozwiązanie ogólne podanego równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. Następnie znajdź również rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $x(2) = -1$ i określ największy przedział zawierający punkt $t_0 = 2$, na którym znaleziona funkcja pozostaje rozwiązaniem równania różniczkowego.

- a. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t}$
- b. $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}$
- c. $\frac{dx}{dt} = x^2$
- d. $\frac{dx}{dt} = x^2 + 1$

1.2. Za pomocą podstawienia $x(t) = ty(t)$ sprowadź podane równania jednorodne do równań o zmiennych rozdzielonych. Następnie postępuj jak w zadaniu 1. (W przykładzie c. można zostawić rozwiązanie w postaci uwikłanej, bo odwikłanie warunku wymaga użycia funkcji W Lamberta; odwikłanie tylko dla chętnych.)

- a. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{t}{x}$
- b. $\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{x^2}{t^2}$
- c. $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+t^2}}{t}$

1.3. Znajdź rozwiązania ogólne równań liniowych z niejednorodnością, rozwiązując najpierw równanie bez niejednorodności, a następnie "uzmienniając stałą".

- a. $\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \sin(\omega t)$, $\alpha, \omega > 0$
- b. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t}x + t^2$

1.4. Znajdź warunek, jaki musi spełniać funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aby jej wykres na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ przecinał prostą $y = ax$ w punkcie (x_0, y_0) , $y_0 = ax_0$ pod kątem prostym. Znajdź warunek, jaki musi ta funkcja spełniać, by jej wykres we wszystkich punktach tworzył z prostymi $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$ kąty proste (ten warunek powinien być równaniem różniczkowym na funkcję f). Znajdź ogólne rozwiązanie tego równania, znajdując w ten sposób rodzinę krzywych prostopadłych w każdym punkcie do rodziny prostych $y = ax$.

1.5. Postępując podobnie jak w zadaniu 4., znajdź rodzinę krzywych prostopadłych w każdym punkcie do rodziny parabol o równaniach $y = ax^2$.

1.6. Znajdź funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f(0) = 0$ oraz zwierciadło o kształcie danym przez wykres funkcji f skupiałoby równoległą wiązkę światła padającą "z góry" w jednym punkcie $(0, a)$ $a > 0$. W tym celu należy znaleźć warunek, jaki musi spełniać funkcja f , aby kąt padania światła na zwierciadło w punkcie $(x_0, f(x_0))$, był równy pożądanemu kątowi odbicia, wyznaczonemu przez prostą łączącą punkt $(0, a)$ z punktem $(x_0, f(x_0))$.

1.7. Znajdź rozwiązanie ogólne układów równań liniowych:

- a. $\frac{dx}{dt} = 3x - y, \frac{dy}{dt} = 2x$
- b. $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x + 2y$
- c. $\frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \frac{dy}{dt} = 2x + 2z, \frac{dz}{dt} = -x + y + z$

1.8. Znajdź rozwiązanie ogólne układów równań liniowych z niejednorodnością:

- a. $\frac{dx}{dt} = 5x - 2y + 4z, \frac{dy}{dt} = x + y + z + e^t, \frac{dz}{dt} = -4x + 3y - 3z$
- b. $\frac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, \frac{dy}{dt} = -x + 2y + e^{-t}$

1.9. Znajdź rozwiązanie ogólne równania liniowego drugiego stopnia z niejednorodnością:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x + \sin(\omega_1 t), \quad \gamma > 0, \quad \omega_0, \omega_1 \in \mathbb{R}$$

1.10. Znajdź rozwiązanie ogólne poniższego równania, wiedząc, że jednym z rozwiązań równania jednorodnego jest $x_1(t) = e^{\frac{1}{t}}$:

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + \frac{1-2t}{t^2} x = \frac{1}{t^3}$$