

Seria 2.: Rozmaitości różniczkowe

2.1. Rozważ jednostkową sferę dwuwymiarową $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ oraz odwzorowania

$$\phi_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \ni (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\phi_2 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \ni (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Wykaż, że te odwzorowania tworzą na sferze $\mathbb{S}^2$ atlas klasy $\mathcal{C}^\infty$, nadając jej strukturę rozmaitości różniczkowej.

2.2. Rozważ przestrzeń ilorazową $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim$ gdzie relacja $\sim$ jest zdefiniowana jako

$$\vec{x} \sim \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{x} = \lambda \vec{y}$$

oraz odwzorowania

$$\hat{\phi}_1 : \{[(x_1, x_2, x_3)]_\sim \in \mathbb{RP}^2 : x_1 \neq 0\} \ni [(x_1, x_2, x_3)]_\sim \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\hat{\phi}_2 : \{[(x_1, x_2, x_3)]_\sim \in \mathbb{RP}^2 : x_2 \neq 0\} \ni [(x_1, x_2, x_3)]_\sim \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2} \right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\hat{\phi}_3 : \{[(x_1, x_2, x_3)]_\sim \in \mathbb{RP}^2 : x_3 \neq 0\} \ni [(x_1, x_2, x_3)]_\sim \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Wykaż, że te odwzorowania tworzą na $\mathbb{S}^2$ atlas klasy $\mathcal{C}^\infty$, nadając jej strukturę rozmaitości różniczkowej.

2.3. Rozważ odwzorowanie

$$\pi : \mathbb{S}^2 \ni (x, y, z) \mapsto [(x, y, z)]_\sim \in \mathbb{RP}^2$$

Wykaż, że jest to odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^\infty$, przy strukturach różniczkowych na $\mathbb{S}^2$ i $\mathbb{RP}^2$ zdefiniowanych jak w powyższych zadaniach.

2.4. Rozważ rozmaitość $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x > 0\}$, sparametryzowaną na dwa sposoby:

$$\psi_1 : \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + s^2 < 1\} \ni (t, s) \mapsto (\sqrt{1-t^2-s^2}, t, s) \in M,$$

$$\psi_2 :]0, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni (\theta, \varphi) \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \in M.$$

Te parametryzacje wyznaczają w każdym punkcie $p \in M$ wektory: $\frac{\partial}{\partial t}$ (styczny do krzywej stałego s), $\frac{\partial}{\partial s}$ (styczny do krzywej stałego t), $\frac{\partial}{\partial \theta}$ (styczny do krzywej stałego φ), $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ (styczny do krzywej stałego θ). Wyraż wektory $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial s}$ w bazie wektorów $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ i vice versa.

Rozważ zanurzenie $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ i wyraż wektory $\iota^* \frac{\partial}{\partial t}, \iota^* \frac{\partial}{\partial s}, \iota^* \frac{\partial}{\partial \theta}, \iota^* \frac{\partial}{\partial \varphi}$ w bazie wektorów $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ (stycznych do linii stałych współrzędnych kartezjańskich w $\mathbb{R}^3$).

2.5. Rozważ $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : (y = 0) \wedge (x \geq 0)\}$ z parametryzacją

$$\psi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\ni (\theta, \varphi) \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \in M$$

definiującą w każdym punkcie M wektory $\frac{\partial}{\partial \theta}$ i $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Niech

$$f : M \ni (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Wyraż wektory $f^* \frac{\partial}{\partial \theta}, f^* \frac{\partial}{\partial \varphi}$ w bazie wektorów $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ stycznych do $\mathbb{R}^2$.

Dwie składowe odwzorowania $\psi^{-1} : M \rightarrow]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ rozdzielmy jako osobne funkcje $\theta : M \rightarrow]0, \pi[, \varphi : M \rightarrow]0, 2\pi[$. Wyraż formy $f_* dx, f_* dy$ za pomocą form $d\theta$ i $d\varphi$.

2.6. Niech $M = \{(\sinh \alpha \cos \varphi, \sinh \alpha \sin \varphi, \cosh \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}, \varphi \in]0, 2\pi[\}$, a odwzoranie ι będzie zanurzeniem M w $\mathbb{R}^3$. Funkcje $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\varphi : M \rightarrow]0, 2\pi[$ są odpowiadającymi powyższej parametryzacji współrzędnymi na M . Rozważ formy $dx, dy, dz, g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz, \eta = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$, i wyraż $\iota_* dx, \iota_* dy, \iota_* dz, \iota_* g$ i $\iota_* \eta$ za pomocą $d\alpha$ i $d\varphi$.

2.7. Rozważ formy na $\mathbb{R}^3$: $\omega_1 = xdy - ydx, \omega_2 = ydz - zdy, \omega_3 = zdx - xdz$. Oblicz $\omega_1 \wedge \omega_2, \omega_2 \wedge \omega_3, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$ i $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1$.

2.8. Wyraż formy dx, dy, dz , formę metryczną $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ i formę objętości $\text{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$ na $\mathbb{R}^3$ we współrzędnych cylindrycznych i we współrzędnych sferycznych.

2.9. Niech g i vol będą jak z poprzedniego zadaniu. Dla dowolnych wektorów A i B stycznych do $\mathbb{R}^3$, niech $\alpha = g(\cdot, A)$ i $\beta = g(\cdot, B)$, czyli niech będą takimi jednoformami, że dla dowolnego wektora v :

$$v \lrcorner \alpha = g(v, A), \quad v \lrcorner \beta = g(v, B).$$

Niech C będzie wektorem takim, że

$$C \lrcorner \text{vol} = \alpha \wedge \beta$$

Przeprowadzając rachunki w układzie kartezjańskim wykaż, że C jest iloczynem wektorowym wektorów A i B . Następnie przeprowadź rachunki również w układzie sferycznym (otrzymując wzór na iloczyn wektorowy w tych współrzędnych).