

Seria 3.: Rozmaitości cd.

3.1. Dla poniższych 1-form ω na $\mathbb{R}^3$ znajdź $d\omega$. Dla tych z nich, dla których $d\omega = 0$ znajdź funkcję f taką, że $\omega = df$ na dziedzinie funkcji f .

$$xyz(dx + dy), \quad xy^2dx + x^2ydy, \quad xdy - ydx, \quad \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

3.2. Rozważ ogólną 2-formę na $\mathbb{R}^4$ w postaci

$$F = E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy + E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

gdzie E_i oraz B_i są pewnymi funkcjami współrzędnych (x, y, z, t) . Zapisz równanie $dF = 0$ za pomocą pól wektorowych $\vec{E}$ i $\vec{B}$ (rozumianych jako zależne od czasu pola wektorowe na $\mathbb{R}^3$).

3.3. Dla rozmaitości 3-wymiarowej z metryką $g = g_{ab}(u)du^a du^b$ i formą objętości $\text{vol} = \sqrt{\det g} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$ definiujemy:

Gradient funkcji f , to takie pole wektorowe $A =: \nabla f$, że $A \lrcorner g = df$. *Rotacja pola wektorowego A* to takie pole wektorowe $B =: \nabla \times A$, że $B \lrcorner \text{vol} = d(A \lrcorner g)$. *Dywergencja pola wektorowego B* to taka funkcja $f =: \nabla \cdot B$, że $f \text{vol} = d(B \lrcorner \text{vol})$. Używając tych definicji, wyprowadź wzory na gradient, rotację i dywergencję w układzie kartezjańskim i sferycznym.

3.4. Rozważ sferę $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ z metryką i formą objętości odziedziczoną z $\mathbb{R}^4$, tzn.

$$g_{\mathbb{S}^3} = \iota^* g_{\mathbb{R}^4}, \quad \text{vol}_{\mathbb{S}^3} = \iota^* (N \lrcorner \text{vol}_{\mathbb{R}^4})$$

gdzie ι jest zanurzeniem sfery w $\mathbb{R}^4$, a $N = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ jest polem wektorowym, które na sferze ma długość 1 i jest do sfery prostopadłe.

Pokaż, w wybranym układzie współrzędnych na sferze $\mathbb{S}^3$, że $\text{vol}_{\mathbb{S}^3} = \sqrt{\det g_{\mathbb{S}^3}} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$ (z dokładnością do znaku), oraz wyprowadź wzory na gradient, rotację i dywergencję w tych współrzędnych.

3.5 Niech (r, θ, φ) będzie sferycznym układem współrzędnych na $\mathbb{R}^3$, oraz $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Znajdź wszystkie możliwe pola wektorowe postaci $A = a^r(r) \frac{\partial}{\partial r}$ takie, że $\nabla \cdot A = f(r)$.

3.6. Niech (ρ, φ, z) będzie sferycznym układem współrzędnych na $\mathbb{R}^3$. Niech j będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^3$ postaci $j = j^z(\rho) \frac{\partial}{\partial z}$, $j^z \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Znajdź wszystkie możliwe pola wektorowe postaci $B = B^\varphi(\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi}$ takie, że $\nabla \times B = j$.

3.7. Rozważ funkcję f na sferze $\mathbb{S}^2$, mającą we współrzędnych sferycznych postać $f(\theta, \varphi) = P(\cos \theta) e^{ik\varphi}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ oraz $P \in C^\infty([-1, 1])$. Pokaż, że istnieje funkcja $Q \in C^\infty([-1, 1])$ taka, że $\Delta f = Q(\cos \theta) e^{ik\varphi}$, i znajdź związek pomiędzy funkcjami Q i P .

3.8. Rozważ funkcję f na $\mathbb{R}^3$, mającą we współrzędnych sferycznych postać $f(r, \theta, \varphi) = u(r) \sin \theta e^{i\varphi}$. Pokaż, że istnieje funkcja $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ taka, że $\Delta f = 0$ (gdzie $\Delta f := \nabla \cdot \nabla f$), i znajdź równanie różniczkowe spełniane przez funkcję u .