

Seria 4.: Całki po rozmaitościach

- 4.1.** Oblicz całkę $\int_M \omega$, gdzie
- a. $\omega = (x - y)dx + xdy$, M jest półokręgiem $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, \pi]\}$
 - b. $\omega = (x - y)dx + xdy$, M jest półokręgiem $\{(\cos t, -\sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, \pi]\}$
 - c. $\omega = (x - y)dx + xdy$, M jest okręgiem $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi]\}$
 - d. $\omega = d((x - y)dx + xdy)$, M jest kołem $\{(r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}$
 - e. $\omega = \text{vol}_{\mathbb{S}^2} = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$, $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$
 - f. $\omega = \sin^n \theta \cos^m \theta e^{ik\varphi} d\theta \wedge d\varphi$, $n, m, k \in \mathbb{N}$, $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$

4.2. Niech M będzie łukiem cykloidy wyznaczonej przez punkt na okręgu o promieniu R toczący się po osi x . Znajdź parametryzację M i wyznacz pole między M a osią x , licząc całkę $\int_M ydx$, oraz długość łuku, licząc całkę $\int_M \text{vol}_M$.

4.3. Wyznacz długość wycinka spirali logarytmicznej $\{(e^t \cos t, e^t \sin t), t \in [t_1, t_2]\}$. Sprawdź, że w granicy $t_1 \rightarrow -\infty$ otrzymujemy skończoną wielkość.

4.4. Wyznacz masę $m = \int_M \rho \text{vol}_M$ oraz energię potencjalną $E = \int_M \rho \phi \text{vol}_M$ jednorodnego ($\rho = \text{const.}$) sznura wiszącego w polu grawitacyjnym o potencjale $\phi(x, y) = gy$ w kształcie krzywej o równaniu $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $x \in [-a, a]$.

4.5. Wyznacz pole $S = \int_M \text{vol}_M$ powierzchni $M = \{(x, y, xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.6. Wyznacz pole powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ będącej fragmentem paraboloidy o równaniu $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ ograniczonym walcem eliptycznym o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$. $a, b, c > 0$.

4.7. Wyznacz pole powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ będącej fragmentem sfery o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ograniczonym walcem o równaniu $(x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2$. $R > 0$.

4.8. Wyznacz pole powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ będącej fragmentem powierzchni walcowej o równaniu $(x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2$ ograniczonej sferą o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. $R > 0$.

4.9. Wyznacz, wykorzystując wzór Greena, pole obszaru $M \subset \mathbb{R}^2$ ograniczonego

- a. kardioidą $\{(2R \cos t - R \cos(2t), 2R \sin t - R \sin(2t)), t \in [0, 2\pi]\}$, $R > 0$
- b. krzywą $\{(\sin t, \sin(2t)), t \in [0, 2\pi]\}$. *Uwaga: krzywa przecina samą siebie.*
- c. krzywą o równaniu $x^3 + y^3 = 3xy$. (Wskazówka: parametryzacje różnych fragmentów tej krzywej można znaleźć używając zmiennej $t = \frac{y}{x}$.)

4.10. Wyznacz, bezpośrednim rachunkiem oraz korzystając z tw. Stokesa, wartość całki $\iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ gdzie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$

oraz $\vec{F} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + x^3 y \frac{\partial}{\partial z}$.

4.11. Wyznacz, bezpośrednim rachunkiem oraz korzystając z tw. Stokesa, wartość całki $\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r}$ gdzie K jest okręgiem o środku w punkcie $(0, 0, 4)$ i promieniu 3, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do osi x , a

$$\vec{F} = -yz \frac{\partial}{\partial x} + (4y - 1) \frac{\partial}{\partial y} + xy \frac{\partial}{\partial z}.$$

4.12. Wyznacz, bezpośrednim rachunkiem oraz korzystając z tw. Gaussa, strumień pola $\vec{F} = \sin(\pi x) \frac{\partial}{\partial x} + y^3 z \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}$ przez całkowitą powierzchnię prostopadłościanu $[-1, 2] \times [0, 1] \times [1, 4]$.

4.13. Wyznacz, bezpośrednim rachunkiem oraz korzystając z tw. Gaussa, strumień pola $\vec{F} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z}$ przez powierzchnię półsfery $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

4.14. Wyznacz objętość bryły powstałej z obrotu kardiody z zadania 4.9.a. w trzecim wymiarze wokół jej osi symetrii.