

Seria 5.: Wstęp do analizy zespolonej

5.1. Sprawdź, czy podane funkcje są różniczkowalne w sensie zespolonym.

- a. $f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
- b. $f(x + iy) = (x^2 + y^2) - 2ixy$
- c. $f(x + iy) = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy - x)$
- d. $f(x + iy) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + i\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

5.2. Znajdź, jeśli istnieje, funkcję rzeczywistą $v(x, y)$ taką by podane funkcje były różniczkowalne w sensie zespolonym.

- a. $f(x + iy) = x - y + iv(x, y)$
- b. $f(x + iy) = xy + x + iv(x, y)$
- c. $f(x + iy) = \sin x + iv(x, y)$
- d. $f(x + iy) = \frac{1}{x^2 + (y+1)^2} (x + iv(x, y))$

5.3. Przyjmując definicje funkcji

$$\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi \quad \text{dla } r > 0, \varphi \in]0, 2\pi[$$

$$(re^{i\varphi})^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi} \quad \text{dla } r > 0, \varphi \in]0, 2\pi[, \alpha \in \mathbb{R}$$

określ, gdzie poniższe funkcje są nieciągłe, i wyznacz granice tych funkcji po obu stronach nieciągłości:

- a. $f(z) = (\ln z)^2$
- b. $f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$
- c. $f(z) = \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}, a < b$
- d. $f(z) = \arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$

5.4 Wyznacz z definicji wartość całki $\int_K f(z)dz$, gdzie

- a. $f(z) = z^3$, krzywa K ma parametryzację $z(t) = e^{it}, t \in [0, \pi]$
- b. $f(z) = z^2$, krzywa K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach 0, 1 oraz $1 + i$
- c. $f(z) = \frac{1}{z}$, krzywa K jest brzegiem prostokąta o wierzchołkach $\pm a \pm ib, a, b > 0$.
- d. $f(z) = \frac{1}{z}$, krzywa K jest złożona z półprostej $] -\infty, -a] \subset \mathbb{R}$, półokręgu od punktu $-a$ do a okrążającego punkt 0 od góry, oraz półprostej $[a, \infty[\subset \mathbb{R}$. $a \in \mathbb{R}_+$.

5.5. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego-Goursata ($\oint_K f(z)dz = 0$ dla funkcji holomorficznej na obszarze ograniczonym krzywą K) wyznacz wartość całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

przez całkowanie funkcji e^{iz}/z po krzywej złożonej z odcinka $[-R, -a]$, łuku od $-a$ do a , odcinka $[a, R]$, i łuku od R do $-R$, i przechodząc do granicy $a \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty$.

5.6. Całkując funkcję e^{-az^2} po prostokącie o wierzchołkach $-R$, R , $R + i\frac{b}{2a}$, $-R + i\frac{b}{2a}$, $a, b > 0$ znajdź wartość całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx$$

5.7. Całkując funkcję e^{-z^2} po krzywej złożonej z odcinka $[0, R]$, łuku od R do $Re^{\frac{i\pi}{4}}$, i odcinka od $Re^{\frac{i\pi}{4}}$ do 0 , i wykonując granicę $R \rightarrow \infty$, znajdź wartości całek

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$