Seria 6.: Analiza zespolona, cd.

6.1. Rozwiń podane funkcje w szereg Taylora wokół podanego punktu i znajdź promień zbieżności tego szeregu.

$$f(z) = \frac{1}{z}, \qquad z_0 = \mathrm{i}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}, \qquad z_0 = 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3\mathrm{i}z - 2}, \qquad z_0 = 1$$

$$f(z) = \ln z, \qquad z_0 = 1 + \mathrm{i}$$

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}}, \qquad z_0 = -1$$

6.2. Rozwiń podane funkcje w szereg Laurenta w podanym pierścieniu

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}, \qquad 1 < |z+2| < 2$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}, \qquad 2 < |z+2|$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \qquad 1 < |z - \mathrm{i}|$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}, \qquad 0 < |z-1| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}, \qquad 1 < |z-1|$$

6.3. Znajdź wszystkie izolowane punkty osobliwe podanych funkcji, i jeśli są biegunami, znajdź ich rząd. Wyznacz residua funkcji w tych punktach oraz w nieskończonosci (jeśli residuum w nieskończoności istnieje):

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^n - 1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f(z) = z^n \exp(\frac{1}{z^2}), \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$$

6.4. Wykorzystując całkowanie po odpowiednim konturze na płaszczyźnie zespolonej, wyznacz wartości całek

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a + b\sin\varphi}, \qquad a > b > 0$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2}, \qquad p \neq \pm 1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(\frac{5}{4}-\sin\varphi)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \qquad a, b > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, \qquad a > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{(x+1)^3}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1}, \qquad \alpha > 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^3+1}$$

$$\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^\alpha \mathrm{d}x = B(\alpha, 1-\alpha), \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x}{4-x^2}$$